

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. М.В. ЛОМОНОСОВА

Факультет вычислительной математики и кибернетики

**ПРАКТИЧЕСКИЕ
ЗАНИЯТИЯ
ПО ФИЗИКЕ
ДЛЯ СТУДЕНТОВ-
МАТЕМАТИКОВ**

*Под редакцией
профессора В.А. Макарова*

ЧАСТЬ I

**С.Ю. Никитин,
С.С. Чесноков**

МЕХАНИКА

**Москва
2006**

УДК 530.1 (075.8)

ББК 22.2

Н62

*Печатается по решению Редакционно-издательского совета
Факультета вычислительной математики и кибернетики
Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова*

Рецензенты:

заведующий кафедрой общей физики
физического факультета МГУ, профессор *А.М. Салецкий*,
заведующий кафедрой физики и прикладной математики
Владимирского госуниверситета, профессор *С.М. Аракелян*

Под редакцией профессора *В.А. Макарова*

Никитин С.Ю., Чесноков С.С.

Н62

Механика: Учебно-методическое пособие. – М.: Издательский отдел факультета ВМиК МГУ им. М.В. Ломоносова (лицензия ИД N 05899 от 24.09.2001 г.), 2006. – 300 с.: ил. (Практические занятия по физике для студентов-математиков. Под ред. В.А. Макарова. Часть 1)
ISBN 5-89407-263-8

Пособие составлено в соответствии с программой раздела "Механика" курса физики по специальности "Прикладная математика". В начале каждого параграфа даются краткие теоретические сведения по рассматриваемой теме. Затем приводятся решения и подробный анализ пяти – семи типовых задач, достаточно полно раскрывающих тему. В конце параграфов предлагаются задачи для самостоятельного решения. Все задачи тщательно отобраны с целью обеспечения минимума сведений и навыков, которые необходимо приобрести студентам при самостоятельном изучении механики. Всего в пособие включено около 280 задач, из которых свыше 80 снабжено решениями.

Пособие предназначено для студентов математических специальностей классических университетов. Оно может оказаться также полезным преподавателям высших учебных заведений при подготовке и проведении практических занятий по физике со студентами различных специальностей. Отдельные задания можно использовать в курсах теоретической механики и статистической физики.

Ил. 193.

УДК 530.1(075.5)

ББК22.2

ISBN 5-89407-263-8

© Факультет вычислительной математики и
кибернетики МГУ им. М.В. Ломоносова, 2006
© С.Ю. Никитин, С.С. Чесноков, 2006

Оглавление

Предисловие редактора	4
§1. Кинематика материальной точки	7
§2. Кинематика твердого тела	23
§3. Кинематика относительного движения	36
§4. Динамика материальной точки. Законы Ньютона	47
§5. Законы сохранения импульса и энергии	64
§6. Релятивистская механика	80
§7. Неинерциальные системы отсчета	93
§8. Момент инерции твердого тела	106
§9. Динамика твердого тела	115
§10. Закон сохранения момента импульса	133
§11. Динамика систем со связями. Уравнения Лагранжа и Гамильтона	144
§12. Статика. Равновесие механической системы	159
§13. Малые колебания	173
§14. Механика жидкостей и газов	195
§15. Статистическая механика	209
§16. Численный анализ в механике	239
§17. Задачи повышенной трудности	276
Ответы	283
Литература	299

Предисловие редактора

Настоящий том открывает серию учебных пособий, которая является обобщением более чем тридцатилетнего опыта преподавания физики для студентов факультета вычислительной математики и кибернетики МГУ им. М.В. Ломоносова. Курс физики для специальности "Прикладная математика" сочетает феноменологию и индуктивный подход общего курса с дедуктивным подходом теоретической физики. Высокий уровень преподавания этого курса базируется на достаточно хорошей математической подготовке студентов-математиков, которой они обладают на момент начала изучения физики.

Значительное внимание в курсе уделяется роли математических моделей в физике, единству современной физики и прикладной математики в интерпретации физических явлений. Пособие ориентировано на то, чтобы научить студентов приемам и методам моделирования реальных или идеализированных явлений с помощью математики. При этом моделируемые явления могут быть в конечном счете любыми, не обязательно физическими, а, например, экономическими, социальными и др. Поскольку методы математического моделирования едины, проще всего их осваивать на примере физических систем, как наиболее наглядных и хорошо изученных. Поэтому особое значение в преподавании физики студентам-математикам имеют практические занятия, пособием для которых и является данная серия.

Серия состоит из пяти томов: "Механика", "Молекулярная физика и термодинамика", "Электродинамика", "Волновые процессы и оптика", "Квантовая механика". Каждый том включает в себя специально подобранные задачи, как оригинальные, составленные авторами, так и известные, методически ценные, но разбросанные по разным изданиям. Кроме того, в каждом томе помещены задачи повышенной сложности, решение которых требует знаний по всему разделу курса, а также задания, отражающие при-

родные явления и современные достижения науки и техники. Среди последних есть качественные задачи, не имеющие точного, выраженного формулой решения, но развивающие умение построить математическую модель явления и сделать численные оценки.

Во всех томах серии используется единый методический подход к обучению студентов практическим навыкам решения и анализа физических задач, построения математических моделей в физике. В начале каждой темы раздела курса дается краткое изложение теории в объеме, необходимом для решения задач, далее приводится подробное решение и анализ нескольких типовых задач, затем сформулированы задания для самостоятельной работы с ответами и необходимыми указаниями. Там, где это целесообразно, приведены примеры применения численных методов в физике.

Естественно, что глубокое изучение физики должно базироваться на проверенных временем классических университетских учебниках. Помещенные в пособие краткие теоретические сведения ни в коей мере не могут их заменить, а призваны в первую очередь заинтересовать студентов, побудить их к самостоятельной и серьезной работе над рекомендованными учебниками.

Пособие предназначено для студентов математических специальностей классических университетов. Оно может оказаться также полезным преподавателям высших учебных заведений при подготовке и проведении практических занятий по физике со студентами различных специальностей. Отдельные задания можно использовать в специальных курсах по теоретической механике, статистической физике, электродинамике, оптике, теории волн, спектральному анализу и другим дисциплинам.

В соответствии с программой по физике для специальности "Прикладная математика" первая часть серии включает в себя механику материальной точки, механику твердого тела, элементы аналитической механики, механику жидкостей и газов, начала статистической механики. Более чем тридцатилетний опыт преподавания этого курса позволил авторам в сжатой и лаконичной форме дать читателям представление об основных разделах механики.

Нам выпало счастье пройти великолепную школу преподавания физики, созданную профессорами С.П. Стрелковым, С.А. Ахмановым, доцентами Г.Я. Мякишевым, Б.Б. Буховцевым. Заложенные ими педагогические традиции бережно сохраняются по сей день на кафедре общей физики и волновых процессов физфака МГУ и обеспечивают успешное обучение физике студентов математических специальностей.

Со дня основания ВМК МГУ руководство факультета постоянно уделяло и уделяет большое внимание преподаванию физики. Усилиями деканов факультета академика А.Н. Тихонова, член-корреспондента РАН Д.П. Костомарова, академика Е.И. Моисеева, а также профессоров М.М. Хапаева, Е.В. Шикина, доцентов В.Г. Сушко и Б.И. Березина, занимавших в разные годы должности заместителей декана по учебной работе, сформировался весьма высокий уровень требований к обучению физике студентов ВМК.

От лица авторов пособия выражаю благодарность всем коллегам, преподающим физику на мехмате и ВМК МГУ, за плодотворное сотрудничество. Глубоко признателен профессорам А.М. Салецкому и С.М. Аракелянцу, взявшим на себя труд по рецензированию пособия и высказавшим ряд ценных критических замечаний.

В.А. Макаров

§1. Кинематика материальной точки

Краткие теоретические сведения

Механическим движением тел называется изменение взаимного расположения тел, их размеров и формы, происходящее с течением времени. Для описания механического движения необходимо выбрать систему отсчета, т.е. указать какое-либо конкретное тело (тело отсчета), относительно которого наблюдается движение других тел, а также связать с телом отсчета координатную систему и часы.

Математическое описание движения в кинематике базируется на различных моделях физических тел. Простейшая модель тела – материальная точка. Так называется тело, размерами которого можно пренебречь. Эта модель применима, когда размеры тела малы по сравнению с характерными размерами области его движения, а также когда твердое тело совершает поступательное движение.

Положение материальной точки в пространстве определяется положением изображающей ее геометрической точки. Оно задается радиус-вектором точки $\mathbf{r}$, соединяющим начало координат с материальной точкой.

Рассмотрим наиболее часто применяемые на практике системы координат.

Прямоугольные (декартовы) координаты: проекции x , y , z радиус-вектора $\mathbf{r}$ точки P на три взаимно перпендикулярные оси OX , OY , OZ (рис. 1.1, а).

Полярные координаты в плоскости XOY : расстояние ρ от точки P до полюса O и полярный угол φ (рис. 1.1, б).

Цилиндрические координаты: полярные координаты ρ , φ проекции точки P на плоскость XOY и проекция z радиус-вектора $\mathbf{r}$ точки P на ось OZ (рис. 1.1, в).

Сферические координаты: длина r радиус-вектора $\mathbf{r}$ точки P , долгота φ и широта θ (рис. 1.1, г).

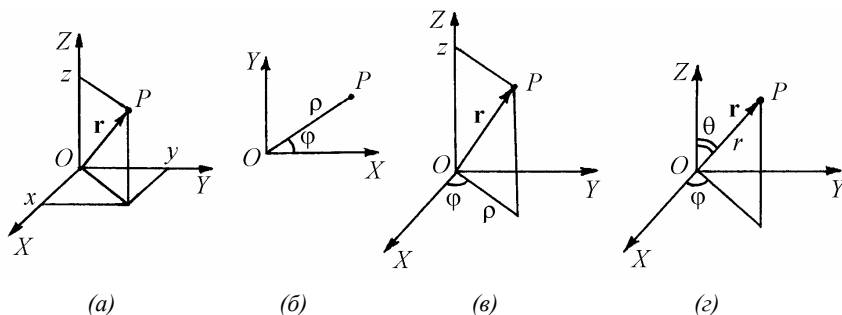


Рис. 1.1. Системы координат

Для описания движения точки используют следующие кинематические характеристики:

Перемещение материальной точки из положения 1 в положение 2 – это вектор

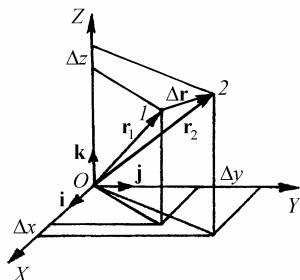


Рис. 1.2. Перемещение точки

$$\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1, \quad (1.1)$$

проведенный из начального положения точки в конечное (рис. 1.2). Проекции вектора перемещения на декартовы координатные оси могут быть выражены через разности координат его конца и начала:

$$\Delta x = x_2 - x_1, \quad \Delta y = y_2 - y_1, \quad \Delta z = z_2 - z_1. \quad (1.2)$$

Эти величины называют перемещениями точки вдоль соответствующих координатных осей. В соответствии с этим вектор перемещения может быть представлен в виде:

$$\Delta \mathbf{r} = \mathbf{i}\Delta x + \mathbf{j}\Delta y + \mathbf{k}\Delta z \quad (1.3)$$

где $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ – единичные векторы в направлении осей OX , OY , OZ соответственно.

Путь точки равен сумме расстояний, пройденных ею вдоль траектории, и всегда является неотрицательной величиной. Пути, пройденные точкой за последовательные промежутки времени, складываются арифметически. Модуль $\Delta r = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$ перемещения точки в общем случае не равен пути, пройденному точкой за данный промежуток времени. Эти величины совпадают только при движении точки по прямой в одном направлении.

Средняя скорость точки в данной системе отсчета на интервале времени $(t, t + \Delta t)$ есть вектор $\mathbf{v}_{\text{ср}}$, равный отношению вектора перемещения $\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)$ к величине интервала времени Δt (рис. 1.3):

$$\mathbf{v}_{\text{ср}} = \frac{\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t} = \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}, \quad (1.4)$$

Направление средней скорости совпадает с направлением вектора перемещения $\Delta \mathbf{r}$. Средняя скорость характеризует движение точки в течение всего промежутка времени Δt , для которого она определена.

На практике часто используют понятие средней путевой скорости, которую определяют как отношение пути, пройденного точкой, ко времени его прохождения. Важно иметь в виду, что величина (модуль) средней скорости в общем случае не совпадает со средней путевой скоростью. Они различны, например, при возвратно-поступательном движении по прямой, при криволинейном движении и т.п.

Мгновенной скоростью (или просто скоростью) $\mathbf{v}(t)$ точки в данной системе отсчета в момент времени t называется предел средней скорости при неограниченном уменьшении интервала времени Δt :

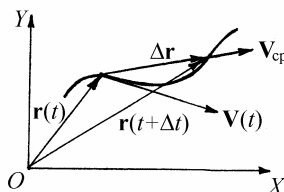


Рис. 1.3. Средняя и мгновенная скорости

$$\mathbf{v}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \dot{\mathbf{r}}. \quad (1.5)$$

Вектор скорости направлен по касательной к траектории точки (рис. 1.3). Проекции скорости точки на декартовы оси равны

$$v_x = \dot{x}, \quad v_y = \dot{y}, \quad v_z = \dot{z}. \quad (1.6)$$

В соответствии с этим вектор скорости точки может быть записан в виде:

$$\mathbf{v}(t) = \{\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t)\} = \dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j} + \dot{z}\mathbf{k}. \quad (1.7)$$

Модуль (величина) скорости выражается через ее проекции на декартовы оси как

$$v(t) = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}. \quad (1.8)$$

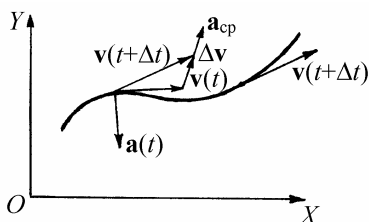


Рис. 1.4. Среднее и мгновенное ускорения

Среднее ускорение точки в данной системе отсчета на интервале времени $(t, t + \Delta t)$ есть вектор $\mathbf{a}_{\text{cp}}$, равный отношению вектора приращения скорости $\Delta \mathbf{v} = \mathbf{v}(t + \Delta t) - \mathbf{v}(t)$ на этом интервале к величине интервала времени Δt (рис. 1.4):

$$\mathbf{a}_{\text{cp}} = \frac{\mathbf{v}(t + \Delta t) - \mathbf{v}(t)}{\Delta t} = \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t}. \quad (1.9)$$

Мгновенным ускорением (или просто ускорением) точки $\mathbf{a}(t)$ в момент времени t в данной системе отсчета называется предел среднего

ускорения при стремлении интервала времени Δt к нулю:

$$\mathbf{a}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \dot{\mathbf{v}} = \ddot{\mathbf{r}}. \quad (1.10)$$

Проекции ускорения точки на декартовы оси равны

$$a_x = \ddot{x}, \quad a_y = \ddot{y}, \quad a_z = \ddot{z}. \quad (1.11)$$

Следовательно, вектор ускорения точки может быть представлен в виде:

$$\mathbf{a}(t) = \{\ddot{x}(t), \ddot{y}(t), \ddot{z}(t)\} = \ddot{x}\mathbf{i} + \ddot{y}\mathbf{j} + \ddot{z}\mathbf{k}. \quad (1.12)$$

Модуль ускорения равен

$$a(t) = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}. \quad (1.13)$$

При криволинейном движении точки часто бывает удобно разложить ее ускорение на две составляющие (рис. 1.5):

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_\tau + \mathbf{a}_n = \boldsymbol{\tau}a_\tau + \mathbf{n}a_n, \quad (1.14)$$

где $\boldsymbol{\tau}$ – единичный вектор, направленный по касательной к траектории в данной точке, $\mathbf{n}$ – единичный вектор по нормали к траектории, направленный к центру кривизны. Составляющая $\mathbf{a}_\tau$ вектора ускорения, направленная по касательной к траектории, называется тангенциальным (касательным) ускорением. Тангенциальное ускорение характеризует изменение вектора скорости по модулю. Вектор $\mathbf{a}_\tau$ направлен в сторону движения точки при возрастании ее скорости и в противополож-

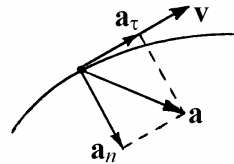


Рис. 1.5. Тангенциальное и нормальное ускорения

ную сторону – при убывании скорости. Составляющая $\mathbf{a}_n$ вектора ускорения, направленная по нормали к траектории в данной точке, называется нормальным ускорением. Нормальное ускорение характеризует изменение вектора скорости по направлению при криволинейном движении. Величины тангенциального и нормального ускорения вычисляются по формулам:

$$a_\tau = \dot{v} = \frac{d|\mathbf{v}|}{dt}, \quad a_n = \frac{v^2}{R}, \quad (1.15)$$

где R – радиус кривизны траектории в данной точке. При движении точки по окружности нормальное ускорение a_n часто называют центростремительным ускорением.

Важной задачей кинематики является получение зависимостей от времени скорости $\mathbf{v}(t)$ и координат материальной точки $\mathbf{r}(t)$ из известной зависимости от времени ее ускорения $\mathbf{a}(t)$ и заданных начальных условий $\mathbf{v}_0$ и $\mathbf{r}_0$. В декартовых координатах имеем:

$$\begin{aligned} v_x(t) &= v_{0x} + \int_0^t a_x(t)dt, \quad v_y(t) = v_{0y} + \int_0^t a_y(t)dt, \\ v_z(t) &= v_{0z} + \int_0^t a_z(t)dt, \end{aligned} \quad (1.16)$$

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 + \int_0^t v_x(t)dt, \quad y(t) = y_0 + \int_0^t v_y(t)dt, \\ z(t) &= z_0 + \int_0^t v_z(t)dt. \end{aligned} \quad (1.17)$$

В частности, если ускорение точки постоянно, то

$$v_x(t) = v_{0x} + a_x t, \quad v_y(t) = v_{0y} + a_y t, \quad v_z(t) = v_{0z} + a_z t, \quad (1.18)$$

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 + v_{0x}t + \frac{a_x t^2}{2}, \quad y(t) = y_0 + v_{0y}t + \frac{a_y t^2}{2}, \\ z(t) &= z_0 + v_{0z}t + \frac{a_z t^2}{2}. \end{aligned} \quad (1.19)$$

В механике часто встречаются задачи, в которых перемещения точек механической системы не являются свободными, а ограничены посредством поверхностей различных тел, стержней, нитей и т.п. В этом случае говорят, что на систему наложены связи. Математически связи описываются так называемыми уравнениями связей, т.е. количественными соотношениями между кинематическими характеристиками движения точек системы.

Примеры решения задач

Пример 1.1. Положение материальной точки на плоскости XOY задано полярными координатами $\rho(t)$ и $\varphi(t)$ (рис. 1.6). Найти модуль скорости точки, считая $\rho(t)$ и $\varphi(t)$ известными функциями времени.

Решение. Модуль скорости, определяемый через декартовы компоненты скорости точки, равен

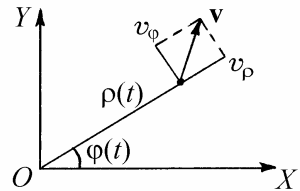


Рис. 1.6

$$v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}.$$

Связь между декартовыми и полярными координатами имеет вид:

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi.$$

Дифференцируя эти выражения по времени, получаем:

$$\dot{x} = \dot{\rho} \cos \varphi - \rho \dot{\varphi} \sin \varphi, \quad \dot{y} = \dot{\rho} \sin \varphi + \rho \dot{\varphi} \cos \varphi.$$

После несложных преобразований находим ответ:

$$v = \sqrt{\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2}.$$

Проекции скорости на координатные оси полярной системы координат равны:

$$v_\rho = \dot{\rho}, \quad v_\varphi = \rho \dot{\varphi}.$$

Пример 1.2. Частица движется по окружности радиусом $R = 160$ см с постоянным тангенциальным ускорением. Известно, что имея нулевую начальную скорость, частица прошла половину длины окружности за время $\tau = 10$ с. Вычислить:

- а) среднюю путевую скорость $v_{\text{ср}}$;
- б) модуль среднего вектора скорости $|\mathbf{v}_{\text{ср}}|$;
- в) модуль среднего вектора полного ускорения $|\mathbf{a}_{\text{ср}}|$

за промежутки времени $t_1 = \tau / 2$ и $t_2 = \tau$, отсчитываемые с момента начала движения частицы.

Решение. Найдем вначале координаты, скорость и ускорение частицы как функции времени. Положение частицы удобно описывать с помощью полярного угла $\varphi(t) = \frac{S(t)}{R}$, где $S(t)$ – путь, пройденный частицей. Поскольку

частица движется вдоль траектории с постоянным тангенциальным ускорением a_τ , $S = \frac{a_\tau t^2}{2}$. По условию задачи $\pi R = \frac{a_\tau \tau^2}{2}$, откуда $a_\tau = \frac{2\pi R}{\tau^2}$ и

$\varphi(t) = \frac{\pi t^2}{\tau^2}$. Таким образом, положение частицы в любой момент времени описывается полярными координатами

$$\rho = R, \quad \varphi = \frac{\pi t^2}{\tau^2}.$$

Зависимость скорости частицы от времени имеет вид $v(t) = a_\tau t = \frac{2\pi R}{\tau^2} t$.

Нормальное ускорение частицы $a_n(t) = \frac{v^2}{R} = \frac{4\pi^2 R}{\tau^4} t^2 = a_\tau \frac{2\pi}{\tau^2} t^2$, ее полное

ускорение $a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \frac{2\pi R}{\tau^2} \sqrt{1 + \frac{4\pi^2}{\tau^4} t^4} = a_\tau \sqrt{1 + \frac{4\pi^2}{\tau^4} t^4}$. Положение час-

тицы, векторы ее скорости $\mathbf{v}$, тангенциального $\mathbf{a}_\tau$, нормального $\mathbf{a}_n$ и полного $\mathbf{a}$ ускорения в моменты времени $t_0 = 0$, $t_1 = \tau/2$ и $t_2 = \tau$ изображены на рис. 1.7.

Найдем теперь требуемые кинематические характеристики на промежутке времени $[0, t_1]$. Путь, пройденный частицей за время t_1 с начала движения $S_1 = \pi R/4$, поэтому ее средняя путевая скорость на рассматриваемом промежутке времени $v_{cp1} = \pi R/(2\tau) = 25$ см/с. Модуль перемещения частицы за этот промежуток времени $\Delta r_1 = 2R \sin 22^\circ,5 = R\sqrt{2-\sqrt{2}}$, следовательно модуль среднего вектора

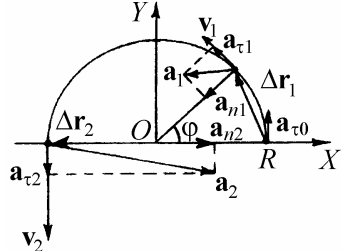


Рис. 1.7

скорости $|\mathbf{v}_{cp1}| = 2R\sqrt{2-\sqrt{2}}/\tau = 24$ см/с. Поскольку начальная скорость частицы равна нулю, величина приращения ее скорости за время t_1 $\Delta v_1 = |\mathbf{v}(t_1) - \mathbf{v}(0)| = v(t_1) = \pi R/\tau$. Следовательно, модуль среднего вектора ускорения на этом промежутке времени $|\mathbf{a}_{cp1}| = 2\Delta v_1/\tau = 2\pi R/\tau^2 = 10$ см/с².

Рассуждая аналогично, находим, что на промежутке времени $[0, t_2]$ средняя путевая скорость частицы $v_{cp2} = \pi R/\tau = 50$ см/с, модуль среднего вектора ее скорости $|\mathbf{v}_{cp2}| = \Delta r_2/\tau = 2R/\tau = 32$ см/с, модуль среднего вектора ускорения $|\mathbf{a}_{cp2}| = \Delta v_2/\tau = v(t_2)/\tau = 2\pi R/\tau^2 = 10$ см/с².

Пример 1.3. Частица движется в плоскости XOY со скоростью $\mathbf{V} = b\mathbf{i} + c\mathbf{j}x$, где $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ – единичные векторы вдоль осей OX и OY , b и c – известные положительные постоянные. При $t = 0$ частица находилась в точке с координатами $x_0 = 0$, $y_0 = 0$. Найти уравнение траектории частицы $y = y(x)$, а также тангенциальное и нормальное ускорения частицы, выразив их величины как функции координаты x .

Решение. По условию задачи $v_x = \dot{x} = b$, $v_y = \dot{y} = cx$. Используя формулы (1.15) и начальные условия, получаем:

$$x = \int_0^t b dt = bt, \quad y = \int_0^t bct dt = bc \frac{t^2}{2}.$$

Исключая из этих соотношений время t , находим уравнение траектории:

$$y = \frac{c}{2b} x^2.$$

Траекторией частицы является парабола. Ускорение частицы направлено вдоль оси OY :

$$\mathbf{a} = \mathbf{j}bc.$$

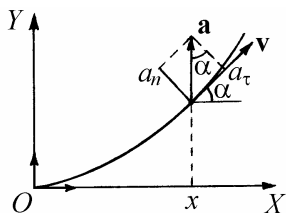


Рис. 1.8

Направление касательной к траектории частицы определяется углом α , причем

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{dy}{dx} = \frac{cx}{b}.$$

Из рис. 1.8 видно, что $a_\tau = a \sin \alpha$, $a_n = a \cos \alpha$.

Окончательно,

$$a_{\tau} = \frac{atg\alpha}{\sqrt{1+tg^2\alpha}} = \frac{c^2x}{\sqrt{1+c^2x^2/b^2}}, \quad a_n = \frac{a}{\sqrt{1+tg^2\alpha}} = \frac{bc}{\sqrt{1+c^2x^2/b^2}}.$$

Пример 1.4. Какую минимальную скорость нужно сообщить камню, чтобы с высоты $h = 2$ м перебросить его через вертикальную стенку высотой $H = 4$ м, находящуюся на расстоянии $L = 4$ м от точки бросания? Толщиной стенки пренебречь. Ускорение свободного падения принять $g = 10$ м/с².

Решение. При описании движения камня выберем систему координат так, чтобы ось OX была направлена горизонтально, а ось OY – вертикально вверх (рис. 1.9). Начало координат поместим на поверхности Земли под точкой бросания.

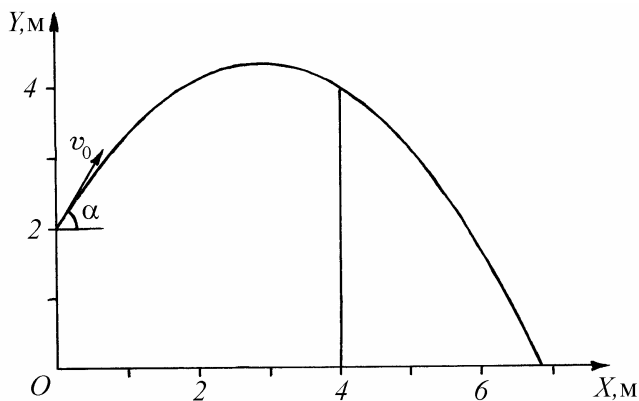


Рис. 1.9

Пусть начальная скорость камня v_0 направлена под углом α к горизонту. Зависимости координат камня от времени имеют вид:

$$x(t) = v_0 t \cos \alpha, \quad y(t) = h + v_0 t \sin \alpha - \frac{gt^2}{2}.$$

Исключая из этих соотношений время t , получим уравнение траектории камня:

$$y(x) = h + \operatorname{tg} \alpha \cdot x - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} \cdot x^2.$$

Для того, чтобы камень перелетел через стенку, его высота y в точке с координатой $x = L$ должна быть не меньше, чем H . Следовательно, условию задачи удовлетворяет соотношение

$$H = h + L \operatorname{tg} \alpha - \frac{gL^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha}.$$

Выражая отсюда v_0^2 и учитывая, что $1/\cos^2 \alpha = 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha$, получаем

$$v_0^2 = \frac{gL}{2} \cdot \frac{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}{\operatorname{tg} \alpha - (H - h)/L}, \text{ или } v_0^2 = a \frac{1 + \xi^2}{\xi - b},$$

где $\xi = \operatorname{tg} \alpha$, $a = \frac{gL}{2}$, $b = \frac{H - h}{L}$.

Условию задачи удовлетворяет такое α , при котором v_0 минимально. Поскольку в диапазоне от 0 до 90° функция $\xi = \operatorname{tg} \alpha$ монотонно возрастает, поиск минимума v_0 по α равносильно поиску минимума v_0^2 по ξ . Вычислим производную

$$\frac{dv_0^2}{d\xi} = a \cdot \frac{\xi^2 - 2b\xi - 1}{(\xi - b)^2},$$

приравнявая которую нулю, получим квадратное уравнение относительно ξ :

$$\xi^2 - 2b\xi - 1 = 0.$$

Условию задачи удовлетворяет положительный корень $\xi = b + \sqrt{b^2 + 1}$. Таким образом, скорость камня минимальна, если его бросить под таким углом α к горизонту, что

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{L} \left(H - h + \sqrt{(H - h)^2 + L^2} \right).$$

Подставляя найденное выражение в формулу для v_0^2 , после несложных преобразований получаем ответ:

$$v_0 = \sqrt{g \left((H - h) + \sqrt{(H - h)^2 + L^2} \right)} \approx 8,05 \text{ м/с}.$$

Камень нужно бросить под углом $\alpha \approx 58^\circ,3$ к горизонту. Траектория камня, удовлетворяющая условию задачи, изображена на рис. 1.9.

Пример 1.5. Записать уравнения связи, накладываемые на перемещения, скорости и ускорения тел, изображенных на рис. 1.10. Рассмотреть только вертикальные перемещения грузиков и подвижного блока, считать, что нить нерастяжима и при движении системы всегда натянута.

Решение. Выразим полную длину нити L как сумму длин отдельных отрезков:

$$(x_1 - x_0) + \pi r_1 + (x_2 - l - x_0) + \pi r_2 + (x_2 - l) = L.$$

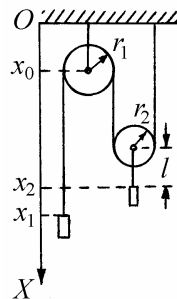


Рис. 1.10

Отсюда вытекает связь между координатами грузиков: $x_1 + 2x_2 = C$, где $C = L - \pi(r_1 + r_2) + 2x_0 + 2l = \text{const}$. Следовательно, соотношение между перемещениями грузиков имеет вид:

$$\Delta x_1 + 2\Delta x_2 = 0.$$

Дифференцируя это соотношение по времени, получаем уравнения связи для скоростей и ускорений грузов:

$$v_{1x} + 2v_{2x} = 0, \quad a_{1x} + 2a_{2x} = 0.$$

Задание для самостоятельной работы

1.6. Положение материальной точки на плоскости XOY задано полярными координатами $\rho(t)$ и $\varphi(t)$ (см. пример 1.1 и рис. 1.6). Найти модуль ускорения точки a , считая $\rho(t)$ и $\varphi(t)$ известными функциями времени.

1.7. Декартовы координаты материальной точки, движущейся в плоскости XOY , изменяются по закону: $x = b \cos \omega t$, $y = c \sin \omega t$, где b , c и ω – положительные постоянные. Найти уравнение траектории точки, величину и направление ее ускорения.

1.8. Радиус-вектор материальной точки изменяется со временем по закону: $\mathbf{r} = \mathbf{b}t(1 - \alpha t)$, где $\mathbf{b}$ – постоянный вектор, α – положительная константа. Найти скорость $\mathbf{v}(t)$ и ускорение точки $\mathbf{a}(t)$ в зависимости от времени, время τ , через которое точка вернется в исходное положение, путь S , пройденный при этом точкой.

1.9. Частица движется в плоскости XOY по закону: $x = bt$, $y = bt(1 - \alpha t)$, где b и α – положительные постоянные. Найти уравнение траектории частицы, скорость $\mathbf{v}(t)$ и ускорение $\mathbf{a}(t)$ частицы в зависимости от времени, время τ , через которое угол между скоростью $\mathbf{v}(t)$ и ускорением $\mathbf{a}(t)$ будет составлять $\pi/4$.

1.10. Точка движется по окружности радиусом R так, что ее тангенциальное ускорение все время равно нормальному. Найдите закон изменения величины скорости точки, полагая, что в момент начала отсчета движения точка имела скорость v_0 . Составьте уравнение движения точки по окружности в

виде зависимости пройденного ею пути от времени.

1.11. Материальная точка, подвешенная на нити длиной l (математический маятник) совершает колебания по закону $\alpha = \alpha_0 \cos \omega t$, где α – угол отклонения нити от вертикали, α_0 – угловая амплитуда колебаний, ω – циклическая частота. Найти величину полного ускорения материальной точки при $\alpha = 0$ и $\alpha = \pm \alpha_0$, а также минимальное значение полного ускорения и значение α_m , ему соответствующее.

1.12. На каком расстоянии l от подножья обрыва и под каким углом α к горизонту нужно установить миномет (рис. 1.11), чтобы дальность S полета мин над плоскогорьем была максимальной? Чему равна эта дальность? Высота обрыва h , начальная скорость мин v_0 .

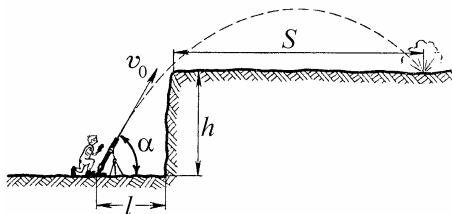


Рис. 1.11

1.13. На какое расстояние l вниз по течению снесет пловца, переплывающего реку шириной L , если он направляет свою скорость v_0 перпендикулярно берегу? Рассмотреть три случая:

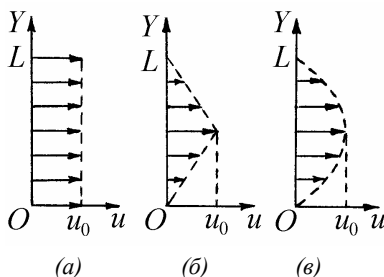


Рис. 1.12

1) скорость течения по всей ширине реки постоянна и равна u_0

(рис. 1.12, а);

2) скорость течения в зависимости от координаты y изменяется по закону: $u(y) = 2u_0 y / L$ при $0 \leq y \leq L/2$, $u(y) = 2u_0(L - y) / L$ при $L/2 \leq y \leq L$ (рис. 1.12, б);

3) скорость течения в зависимости от координаты y изменяется по закону: $u(y) = u_0 \left(1 - 4(y - L/2)^2 / L^2 \right)$ (рис. 1.12, в).

1.14. Абсолютно жесткий стержень движется в плоскости, перпендикулярной двум другим плоскостям, образующим прямой угол (рис. 1.1.13). Зная в некоторый момент времени скорость левого конца стержня v_y и угол α между стержнем и осью OY , найти в этот момент скорость v_x правого конца стержня и скорость v_c его центра.

1.15. Найти уравнения связей для координат, скоростей и ускорений грузиков в системе, изображенной на рис. 1.14. Считать, что грузики движутся вертикально, нити нерастяжимы и все время натянуты.

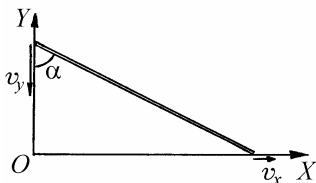


Рис. 1.13

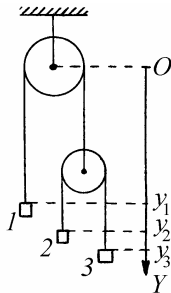


Рис. 1.14

§2. Кинематика твердого тела

Краткие теоретические сведения

Под твердым телом в механике понимают систему материальных точек, расстояние между любой парой которых всегда остается неизменным. Иными словами, это тело, форма и размеры которого не меняются в процессе движения. В общем случае для описания положения тела в пространстве необходимы шесть независимых координат: три координаты характеризуют положение какой-либо точки тела (например, его центра масс), еще три задают его ориентацию в пространстве. Различают следующие виды движений твердого тела: поступательное движение, вращение вокруг неподвижной оси (или просто вращение), плоское движение, движение с одной неподвижной точкой и произвольное движение.

Поступательным называют такое движение тела, при котором его ориентация в пространстве остается неизменной. В этом случае перемещение тела полностью определяется перемещением какой-либо одной его точки. Поэтому кинематика поступательного движения тела по существу сводится к кинематике материальной точки. При поступательном движении скорости всех точек тела одинаковы: $\mathbf{v}_i = \mathbf{v}$. Ускорения всех точек тела также равны друг другу: $\mathbf{a}_i = \mathbf{a}$.

Вращение вокруг неподвижной оси – это движение, при котором все точки тела движутся по окружностям, а центры всех окружностей лежат на одной прямой, называемой осью вращения. Ось вращения – это прямая линия, на которой лежат неподвижные точки тела. Примерами вращательного движения являются вращение карусели, колебания маятника и т.п.

Положение тела в пространстве удобно характеризовать углом поворота относительно некоторого фиксированного положения. Обозначим этот угол через φ и будем считать, что φ измеряется в радианах. Закон движения тела можно представить в виде зависимости угла поворота от времени: $\varphi = \varphi(t)$.

Угловой скоростью вращения тела называется производная угла поворота тела по времени

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}. \quad (2.1)$$

Угловая скорость характеризует быстроту изменения ориентации тела в пространстве и измеряется в радианах в секунду. Если угловая скорость вращения тела известна, то величину скорости любой точки тела относительно неподвижной системы отсчета можно выразить по формуле

$$v_i = \omega r_{i\perp}, \quad (2.2)$$

где $r_{i\perp}$ — расстояние от данной точки тела до оси вращения.

Чтобы записать выражение для вектора скорости $\mathbf{v}_i$ произвольной точки тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, вводят понятие вектора

угловой скорости. Так называется вектор $\boldsymbol{\omega}$, направленный вдоль оси вращения тела по правилу правого винта (рис. 2.1) и равный по модулю производной угла поворота тела по времени. Вектор скорости произвольной точки тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, равен векторному произведению вектора угловой скорости вращения тела на радиус-вектор точки с началом на оси вращения:

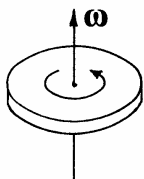


Рис. 2.1. Вектор угловой скорости

$$\mathbf{v}_i = [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}_i]. \quad (2.3)$$

Угловым ускорением вращения тела называется производная угловой скорости по времени:

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}. \quad (2.4)$$

Угловое ускорение характеризует быстроту изменения угловой скорости вращения тела и измеряется в радианах на секунду в квадрате. Если угловое ускорение известно, то величину тангенциального ускорения любой точки тела можно найти по формуле:

$$a_{i\tau} = \varepsilon r_{i\perp}. \quad (2.5)$$

Вектором углового ускорения называется производная вектора угловой скорости по времени:

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}. \quad (2.6)$$

Плоским называют такое движение твердого тела, при котором все его точки движутся в параллельных фиксированных плоскостях. Например, качение автомобильного колеса по прямолинейному участку дороги является плоским движением.

Плоское движение можно рассматривать как суперпозицию поступательного движения и вращения вокруг неподвижной оси. Введем вспомогательную (“сопровождающую”) систему координат, начало которой связано с какой-либо точкой тела (например с центром масс), а оси параллельны осям неподвижной системы. Относительно неподвижной системы сопровождающая система координат совершает поступательное движение. Обозначим скорость этого движения через v_c . В сопровождающей системе отсчета движение тела представляет собой вращение вокруг неподвижной оси. Заметим, что угловая скорость вращения ω не зависит от того, с какой именно точкой тела связано начало сопровождающей системы отсчета. Кроме того, при плоском движении ориентация вектора ω не зависит от времени.

Применяя правило сложения скоростей, согласно которому абсолютная скорость материальной точки равна сумме ее относительной скорости и скорости движущейся системы отсчета, скорость произвольной точки тела можно записать в виде

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_c + [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}_{ic}] \quad (2.7)$$

Здесь $\mathbf{r}_{ic}$ – радиус-вектор данной точки тела в сопровождающей системе координат.

Рассмотрим теперь движение тела с одной неподвижной точкой. Примерами такого движения могут служить вращение гироскопа на кардановом подвесе, вращение волчка, опирающегося о неподвижную шероховатую поверхность и т.п.

В соответствии с теоремой Эйлера движение тела, закрепленного в одной точке, можно рассматривать как вращение вокруг мгновенной оси, т.е. прямой, проходящей через неподвижные в данный момент времени точки тела, в том числе через точку закрепления.

Математически теорема Эйлера выражается формулой (2.3), в которой $\mathbf{v}_i$ – скорость некоторой точки тела, $\boldsymbol{\omega}$ – вектор мгновенной угловой скорости вращения, $\mathbf{r}_i$ – радиус-вектор данной точки тела. При этом предполагается, что начало отсчета выбрано в точке закрепления тела. Заметим, что в отличие от случая плоского движения, в рассматриваемом здесь случае вектор угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ может менять свою ориентацию с течением времени как относительно неподвижной системы координат, так и относительно самого тела: $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}(t)$.

Произвольное движение твердого тела можно рассматривать как суперпозицию перемещения некоторой точки тела (например, его центра масс) и изменения ориентации тела в пространстве. Скорость любой точки тела относительно сопровождающей системы, связанной с центром масс, определяется по формуле (2.3), а скорость этой точки относительно неподвижной системы отсчета записывается в виде (2.7).

Во многих задачах возникает необходимость описании ориентации твердого тела в пространстве. Удобным средством такого описания является матрица поворота тела. При получении этой матрицы будем исходить из того, что описать ориентацию твердого тела – значит описать ориентацию одной координатной системы относительно другой, имеющей с первой общее начало.

Рассмотрим две декартовы системы координат S и S' , имеющие

общее начало отсчета. Орты системы S обозначим через $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$, а орты системы S' – через $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3$. Пусть положение некоторой материальной точки M в пространстве характеризуется радиус-вектором $\mathbf{r}$ (рис. 2.2). Этот вектор можно выразить через орты обеих координатных систем:

$$\mathbf{r} = \mathbf{e}_1 x_1 + \mathbf{e}_2 x_2 + \mathbf{e}_3 x_3 = \mathbf{e}'_1 x'_1 + \mathbf{e}'_2 x'_2 + \mathbf{e}'_3 x'_3. \quad (2.8)$$

Здесь x_1, x_2, x_3 – декартовы координаты точки M относительно системы S , а x'_1, x'_2, x'_3 – декартовы координаты той же точки относительно системы S' . Для установления связи между x_1, x_2, x_3 и x'_1, x'_2, x'_3 умножим скалярно векторные равенства (2.8) по очереди на орты $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ и $\mathbf{e}_3$ системы S . Принимая во внимание нормированность ортов, получим

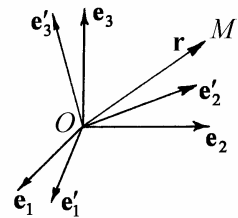


Рис. 2.2. К выводу матрицы поворота

$$x_1 = \mathbf{e}_1 \mathbf{e}'_1 x'_1 + \mathbf{e}_1 \mathbf{e}'_2 x'_2 + \mathbf{e}_1 \mathbf{e}'_3 x'_3, \quad (2.9)$$

$$x_2 = \mathbf{e}_2 \mathbf{e}'_1 x'_1 + \mathbf{e}_2 \mathbf{e}'_2 x'_2 + \mathbf{e}_2 \mathbf{e}'_3 x'_3, \quad (2.10)$$

$$x_3 = \mathbf{e}_3 \mathbf{e}'_1 x'_1 + \mathbf{e}_3 \mathbf{e}'_2 x'_2 + \mathbf{e}_3 \mathbf{e}'_3 x'_3. \quad (2.11)$$

Формулы (2.9) – (2.11) выражают декартовы координаты точки M в системе S через координаты той же точки в системе S' и скалярные произведения ортов обеих систем. Полученный результат можно представить более компактно в виде

$$x_i = \sum_j s_{ij} x'_j, \quad (2.12)$$

где индексы i и j пробегают значения от 1 до 3, а коэффициенты s_{ij} определяются формулами

$$s_{ij} = \mathbf{e}_i \mathbf{e}'_j. \quad (2.13)$$

Коэффициенты этого преобразования удобно записать в виде матрицы

$$\hat{S} = \begin{vmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} \end{vmatrix}. \quad (2.14)$$

Матрица $\hat{S} = \|s_{ij}\|$, элементы которой представляют собой скаляр-

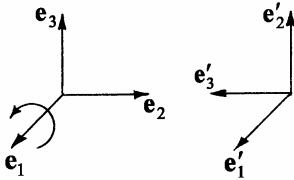


Рис. 2.3. Поворот вокруг оси x_1 на 90°

ные произведения ортов двух координатных систем, задает пространственную ориентацию одной декартовой системы координат относительно другой, имеющей с ней общее начало. Согласно теореме Эйлера, переход от системы S к системе S' можно осуществить путем поворота системы S вокруг некоторой оси.

Поэтому матрицу $\hat{S}$ называют также матрицей поворота. Элементы матрицы поворота называют направляющими косинусами.

Любой поворот тела с одной неподвижной точкой может быть описан соответствующей матрицей. Например, поворот вокруг оси x_1 на 90° , выполненный по правилу правого винта (рис. 2.3), описывается матрицей

$$\hat{S} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Примеры решения задач

Пример 2.1. По горизонтальной плоскости катится без проскальзывания

цилиндр радиусом R . На какое расстояние x_c сместится центр цилиндра при его повороте на угол φ ?

Решение. Движение цилиндра иллюстрирует рис. 2.4. Из отсутствия проскальзывания следует, что смещение центра цилиндра x_c равно длине дуги окружности радиусом R , соответствующей центральному углу φ . Таким образом,

$$x_c = R\varphi.$$

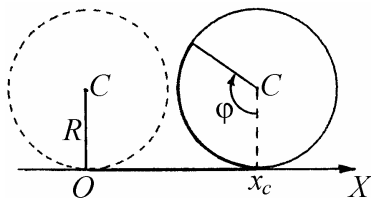


Рис. 2.4

Заметим, что отсюда следует кинематическая связь скорости движения центра цилиндра v_c с угловой скоростью вращения ω

$$v_c = R\dot{\varphi} = R\omega,$$

а также связь ускорения движения центра a_c с угловым ускорением вращения цилиндра ε :

$$a_c = R\dot{\omega} = R\varepsilon.$$

Пример 2.2. Стержень длиной l движется в горизонтальной плоскости (рис. 2.5, а). В некоторый момент времени скорости концов стержня направлены по нормали к стержню и составляют величины v_1 и v_2 . Найти скорость движения центра стержня v_c и угловую скорость вращения стержня ω в этот момент времени.

Решение. Движение стержня можно рассматривать как совокупность перемещения его центра и вращения вокруг оси, проходящей через центр (рис. 2.5, б). Относительно

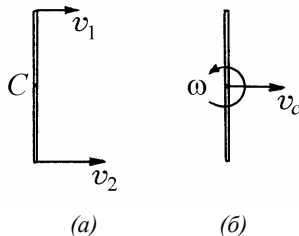


Рис. 2.5

центра стержня его концы движутся по окружности радиуса $l/2$ с угловой скоростью ω . Следовательно их линейные скорости относительно центра равны $v' = \omega l/2$. Одна из этих скоростей направлена параллельно скорости движения центра, а другая – в противоположную сторону. Применяя правило сложения скоростей, запишем

$$v_1 = v_c - \omega l/2, \quad v_2 = v_c + \omega l/2.$$

Используя эти формулы, находим ответ:

$$v_c = \frac{1}{2}(v_1 + v_2), \quad \omega = \frac{1}{l}(v_2 - v_1).$$

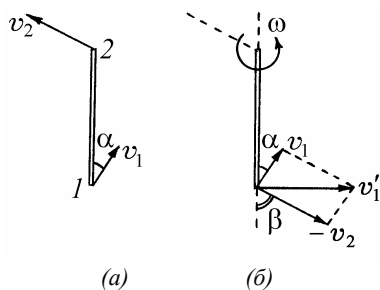


Рис.2.6

Пример 2.3. Стержень длиной l движется в горизонтальной плоскости. В некоторый момент времени скорости концов стержня равны v_1 и v_2 , причем скорость первого из них направлена под углом α к стержню (рис 2.6, а). Какова угловая скорость вращения стержня ω в этот момент времени?

Решение. Введем сопровождающую систему отсчета, связав ее начало с одним из концов стержня. Пусть это будет точка 2, показанная на рис. 2.6, б. В интересующий нас момент времени сопровождающая система отсчета движется поступательно со скоростью, равной v_2 . Относительно сопровождающей системы второй конец стержня (точка 1 на рис. 2.6, б) движется по окружности радиусом l с угловой скоростью ω . Следовательно, его линейная скорость в сопровождающей системе равна

$$v'_1 = \omega l$$

и направлена перпендикулярно стержню. С другой стороны, скорость $\mathbf{v}'_1$ можно найти, используя правило сложения скоростей. Согласно этому правилу

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}'_1 + \mathbf{v}_2.$$

Отсюда $\mathbf{v}'_1 = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$. Построение вектора скорости $\mathbf{v}'_1$ точки I в сопровождающей системе отсчета показано на рис. 2.6, б. Для этого к вектору $\mathbf{v}_1$ прибавлен вектор, равный $-\mathbf{v}_2$. Из условия перпендикулярности вектора $\mathbf{v}'_1$ стержню получаем соотношение

$$v_1 \cos \alpha = v_2 \cos \beta,$$

где через β обозначен угол между стержнем и вектором скорости $\mathbf{v}_2$. Как видно из рис. 2.6, б, модуль вектора $\mathbf{v}'_1$ выражается формулой

$$v'_1 = v_1 \sin \alpha + v_2 \sin \beta.$$

Объединяя записанные выражения, находим ответ:

$$\omega = \frac{1}{l} \left(v_1 \sin \alpha + \sqrt{v_2^2 - v_1^2 \cos^2 \alpha} \right).$$

Пример 2.4. По вогнутой цилиндрической поверхности радиусом R катится без проскальзывания цилиндр радиусом r . Выразить угловую скорость вращения цилиндра ω через скорость движения его центра v_c .

Решение. Качение цилиндра иллюстрирует рис. 2.7. Выберем начало отсчета на оси цилиндрической поверхности (точка O), соединим эту точку с центром цилиндра (точка C), угол между вертикалью и линией OC обозначим через φ . Этот угол характеризует положение центра цилиндра. Так как

центр цилиндра движется по дуге окружности радиусом $R - r$, скорость движения центра можно записать в виде

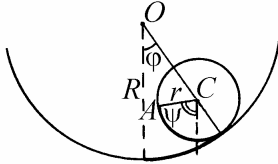


Рис. 2.7

$$v_c = (R - r)\dot{\varphi}.$$

Выберем далее некоторую точку A на поверхности цилиндра и будем считать, что при $\varphi = 0$ точки O , C и A лежат на одной прямой.

Вращение цилиндра будем описывать углом ψ между вертикалью и линией AC . По определению угловой скорости

$$\omega = \dot{\psi}.$$

Из отсутствия проскальзывания следует, что дуга окружности радиусом R , соответствующая центральному углу φ , равна длине дуги окружности радиусом r , соответствующей центральному углу $\varphi + \psi$, т.е.

$$R\varphi = r(\varphi + \psi).$$

Дифференцируя по времени последнее равенство, получаем:

$$R\dot{\varphi} = r(\dot{\varphi} + \dot{\psi}).$$

Объединяя записанные выражения, находим ответ: $\omega = v_c / r$.

Пример 2.5. Известны орты $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ декартовой системы координат S , показанной на рис. 2.2, и матрица поворота $\hat{S}$, элементы которой s_{ij} определяются формулами (2.13). Построить орты $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3$ системы S' .

Решение. Пусть M – некоторая материальная точка. Радиус-вектор этой точки в системах S и S' выражается формулами (2.8), которые можно представить в виде

$$\mathbf{r} = \sum_i \mathbf{e}_i x_i \quad (2.15)$$

и

$$\mathbf{r} = \sum_j \mathbf{e}'_j x'_j. \quad (2.16)$$

Подставив выражение (2.12) в формулу (2.15), получим

$$\mathbf{r} = \sum_i \mathbf{e}_i \sum_j s_{ij} x'_j$$

или, поменяв порядок суммирования,

$$\mathbf{r} = \sum_j x'_j \sum_i s_{ij} \mathbf{e}_i. \quad (2.17)$$

Сравнивая формулы (2.16) и (2.17), находим

$$\mathbf{e}'_j = \sum_i s_{ij} \mathbf{e}_i.$$

Таким образом, матрицу поворота $\hat{S}$ можно рассматривать как матрицу, связывающую между собой орты двух декартовых систем координат, повернутых одна относительно другой.

Задание для самостоятельной работы

2.6. По горизонтальной плоскости катится без проскальзывания цилиндр радиусом R . Выразить декартовы координаты x и y некоторой точки A на ободе колеса через угол поворота колеса φ (рис. 2.8).

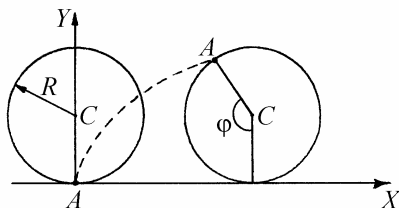


Рис. 2.8

- 2.7.** Стержень длиной l движется в вертикальной плоскости, опираясь одним концом на вертикальную, а другим – на горизонтальную плоскость (рис. 2.9). В некоторый момент времени скорости концов стержня равны v_1 и v_2 . Найти угловую скорость вращения стержня ω в этот момент времени.

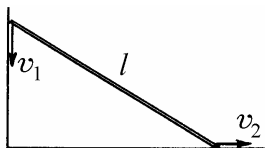


Рис. 2.9

- 2.8.** Стержень AB движется в горизонтальной плоскости (рис. 2.10). В некоторый момент скорость его центра составляет угол $\alpha = 30^\circ$ с направлением стержня, величина скорости точки B равна $v_B = 2$ м/с, а скорость точки A перпендикулярна к скорости точки B . Найдите величину скорости v_0 , с которой движется центр стержня в этот момент времени.

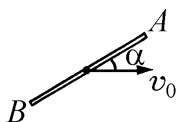


Рис. 2.10

- 2.9.** По выпуклой цилиндрической поверхности радиусом R катится без проскальзывания цилиндр радиусом r . Выразить угловую скорость вращения цилиндра ω через скорость движения его центра v_c .

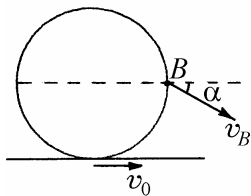


Рис. 2.11

- 2.10.** Колесо катится без проскальзывания по ленте транспортера, движущейся горизонтально со скоростью $v_0 = 1$ м/с, в направлении движения ленты (рис. 2.11). Известно, что относительно неподвижного наблюдателя скорость точки B , находящейся на ободе колеса на его горизонтальном диаметре, составляет с горизонтом угол $\alpha = 30^\circ$. Найти скорость v центра колеса относительно неподвижного наблюдателя.

- 2.11.** Построить матрицу поворота, описывающую поворот твердого тела вокруг оси x_3 на угол φ . Поворот выполняется по правилу правого винта.

- 2.12.** Известна матрица поворота твердого тела $\hat{S} = \|s_{ij}\|$. Построить матрицу

цу обратного поворота $\hat{T} = \|t_{ij}\|$.

2.13. Написать шесть уравнений, которые в общем случае связывают между собой элементы матрицы поворота твердого тела s_{ij} .

2.14. Пусть поворот тела из положения 1 в положение 2 описывается матрицей $\hat{S}^{(1)}$, а поворот тела из положения 2 в положение 3 описывается матрицей $\hat{S}^{(2)}$. Построить матрицу $\hat{S}$, описывающую поворот тела из положения 1 в положение 3.

2.15. Известны декартовы компоненты скорости и ускорения материальной точки v_i и a_i ($i = 1, 2, 3$) относительно системы координат S . Известна также матрица $\hat{S} = \|s_{ij}\|$, описывающая поворот системы S к системе S' . Найти декартовы компоненты скорости и ускорения материальной точки v'_i и a'_i относительно системы S' .

§3. Кинематика относительного движения

Краткие теоретические сведения

На практике часто возникает необходимость связать систему отсчета с каким-нибудь движущимся или вращающимся телом. Так, физические явления на борту космической станции удобно рассматривать в системе отсчета, связанной с самой станцией. Движения тел вблизи земной поверхности естественно рассматривать относительно поверхности Земли. Между тем сама земная поверхность движется вследствие суточного вращения Земли, а также за счет движения Земли по орбите вокруг Солнца. Возникает вопрос: какие особенности приобретают физические явления, если их рассматривать относительно движущейся системы отсчета? Изучение этих особенностей целесообразно начать с установления связей между кинематическими характеристиками движения точки (радиус-вектором, скоростью, ускорением), взятыми по отношению к двум разным системам отсчета: неподвижной и движущейся.

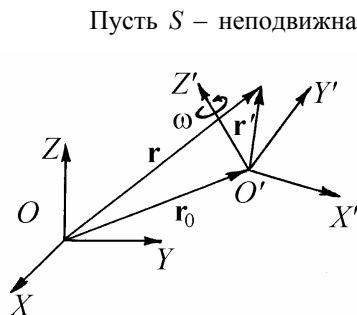


Рис. 3.16. Неподвижная и движущаяся системы отсчета

3.1). Будем считать, что начало отсчета подвижной системы совершает произвольное движение, а сама эта система вращается с постоянной угловой скоростью $\omega = \text{const}$. Рассмотрим материальную точку M , которая совершает произвольное движение относительно двух указанных систем отсчета. Обозначим через $\mathbf{r}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{a}$ соответственно радиус-вектор, скорость и ускорение точки

относительно системы S , через $\mathbf{r}'$, $\mathbf{v}'$, $\mathbf{a}'$ — ее радиус-вектор, скорость и ускорение относительно системы S' . Радиус-вектор, скорость и ускорение начала отсчета подвижной системы по отношению к неподвижной системе

обозначим соответственно через $\mathbf{r}_0$, $\mathbf{v}_0$, $\mathbf{a}_0$. Кинематические соотношения между перечисленными величинами имеют вид:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{r}' , \quad (3.1)$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}' + [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}'] , \quad (3.2)$$

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_0 + \mathbf{a}' + [\boldsymbol{\omega}, [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}']] + 2[\boldsymbol{\omega}, \mathbf{v}'] . \quad (3.3)$$

В частности, при поступательном движении системы S' , когда $\boldsymbol{\omega} = 0$, из формул (3.2), (3.3) получаем

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}' , \quad (3.4)$$

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_0 + \mathbf{a}' . \quad (3.5)$$

Если материальная точка жестко связана с движущейся системой отсчета, т.е. если $\mathbf{v}' = 0$, то последнее слагаемое в правой части формулы (3.3) обращается в нуль и эта формула приобретает вид

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}' + \mathbf{a}_n , \quad (3.6)$$

где величина

$$\mathbf{a}_n = \mathbf{a}_0 + [\boldsymbol{\omega}, [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}']] \quad (3.7)$$

называется переносным ускорением. Последнее слагаемое в формуле (3.7) можно преобразовать к виду

$$[\boldsymbol{\omega}, [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}']] = -\omega^2 \mathbf{r}'_{\perp} , \quad (3.8)$$

где символом $\mathbf{r}'_{\perp}$ обозначена составляющая радиус-вектора точки M относительно подвижной системы отсчета, перпендикулярная вектору $\boldsymbol{\omega}$. Вектор

$-\mathbf{r}'_{\perp}$ направлен от точки M к оси вращения подвижной системы. Поэтому ускорение точки, выражаемое формулой (3.8), часто называют центростремительным ускорением. Наконец, последнее слагаемое в правой части формулы (3.3)

$$\mathbf{a}_k = 2[\boldsymbol{\omega}, \mathbf{v}'] \quad (3.9)$$

называют кориолисовым ускорением. Кориолисово ускорение отлично от нуля только для точки, движущейся относительно вращающейся системы отсчета. Таким ускорением обладает, в частности, маятник Фуко. Кориолисово ускорение, обусловленное суточным вращением Земли, приводит к тому, что плоскость колебаний маятника поворачивается относительно земной поверхности.

Используя обозначения (3.7) и (3.9), формулу (3.3) можно представить в виде

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}' + \mathbf{a}_n + \mathbf{a}_k. \quad (3.10)$$

Таким образом, в общем случае абсолютное ускорение материальной точки равно сумме относительного, переносного и кориолисова ускорений.

Примеры решения задач

Пример 3.1. Пловец переплывает реку шириной L по прямой, перпендикулярной берегу, и возвращается обратно, затратив на весь путь время $t_1 = 4$ мин. Проплывая такое же расстояние L вдоль берега реки и возвращаясь обратно, пловец затрачивает время $t_2 = 5$ мин. Найти, во сколько раз α скорость пловца относительно воды превышает скорость течения, считая ее по всей ширине реки постоянной.

Решение. Пусть v_0 – скорость пловца относительно воды, а u – скорость течения реки. Тогда искомая величина

$$\alpha = \frac{v_0}{u}. \quad (3.11)$$

Свяжем неподвижную систему отсчета с берегом, а движущуюся – с речной водой. Скорость пловца относительно берега $\mathbf{v}$ определяется правилом сложения скоростей (3.4). В обозначениях данной задачи имеем:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{u}.$$

Взаимное расположение этих векторов для случая, когда пловец плавает по прямой, перпендикулярной берегу, показано на рис. 3.2. Как видно из этого рисунка, модуль скорости пловца относительно берега

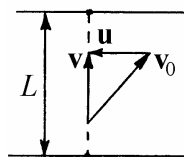


Рис.3.2

$$v = \sqrt{v_0^2 - u^2}. \quad (3.12)$$

При этом время, затрачиваемое пловцом на то, чтобы переплыть реку и вернуться обратно

$$t_1 = \frac{2L}{v}. \quad (3.13)$$

Когда пловец плавает по течению реки, его скорость относительно берега равна $v_0 + u$. Если же он плавает против течения, то движется относительно берега со скоростью, равной $v_0 - u$. Следовательно, время, необходимое пловцу для того, чтобы проплыть расстояние L и вернуться обратно, будет

$$t_2 = \frac{L}{v_0 + u} + \frac{L}{v_0 - u}. \quad (3.14)$$

Используя формулы (3.11) – (3.14), находим

$$\alpha = \frac{t_2}{\sqrt{t_2^2 - t_1^2}} = \frac{5}{3}.$$

Пример 3.2. Математический маятник длиной $l = 0,3$ м установлен в кабине космического корабля. Во время старта ракеты маятник совершает колебания с периодом $T = 0,7$ с. С каким ускорением a движется ракета относительно поверхности Земли?

Решение. Математический маятник представляет собой материальную точку, подвешенную на невесомой нити, и совершающую колебания под действием силы тяжести. Согласно формуле Гюйгенса, период малых колебаний маятника определяется длиной нити l и ускорением свободного падения g , а именно,

$$T = \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Если маятник установлен в кабине космического корабля, то период его колебаний определяется ускорением свободного падения g' в системе отсчета, связанной с кораблем:

$$T = \sqrt{\frac{l}{g'}}. \quad (3.15)$$

Связь ускорений свободного падения относительно земли и относительно ракеты можно найти, используя правило сложения ускорений (3.5). Так как ускорение ракеты на старте направлено вверх,

$$g' = g + a. \quad (3.16)$$

Используя формулы (3.15), (3.16), находим

$$a = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 l - g \approx 14 \text{ м/с}^2.$$

Пример 3.3. В кабине лифта, движущейся с ускорением $a_0 = 0,8 \text{ м/с}^2$, направленным вниз, бросают вертикально вверх маленький шарик. Начальная скорость шарика относительно лифта $v_0 = 6 \text{ м/с}$. На какую высоту h поднимется шарик относительно лифта?

Решение. Согласно правилу сложения ускорений (3.5), ускорение свободного падения тела в системе отсчета, связанной с лифтом,

$$g' = g - a_0. \quad (3.17)$$

В этой же системе отсчета закон движения шарика и закон изменения его скорости имеют вид

$$x(t) = v_0 t - \frac{g' t^2}{2} \quad (3.18)$$

и

$$v_x(t) = v_0 - g' t. \quad (3.19)$$

В момент достижения верхней точки траектории скорость шарика относительно лифта обращается в ноль: $v_x(t_0) = 0$. Используя формулу (3.19),

находим время движения шарика вверх: $t_0 = \frac{v_0}{g'}$. Подставив это время в

формулу (3.18), получаем $h = x(t_0) = \frac{v_0^2}{2g'}$ или, с учетом (3.17),

$$h = \frac{v_0^2}{2(g - a_0)} = 2 \text{ м}.$$

Пример 3.4. Пробирка с жидкостью установлена на расстоянии $R = 10$ см от оси центрифуги, которая вращается, совершая $n = 1000$ оборотов в секунду. Во сколько раз α центростремительное ускорение молекул жидкости превышает ускорение свободного падения g ?

Решение. Согласно формуле (3.8), центростремительное ускорение $a = \omega^2 R$, где ω – угловая скорость вращения центрифуги. Она связана с частотой вращения n соотношением $\omega = 2\pi n$. Отсюда следует, что $a = (2\pi n)^2 R$. Таким образом, $\alpha = \frac{(2\pi n)^2 R}{g} \approx 4 \cdot 10^5$.

Пример 3.5. Тело движется с юга на север со скоростью $v = 10$ м/с вблизи точки земной поверхности с географической широтой $\varphi = 30^\circ$. Какова величина кориолисова ускорения этого тела?

Решение. Согласно формуле (3.9) абсолютная величина кориолисова ускорения

$$a_k = 2\omega v' \sin \alpha,$$

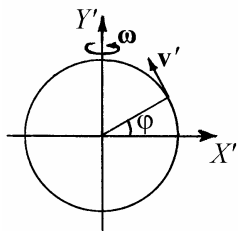


Рис. 3.3

где α – угол между векторами ω и v' . Как видно из рис. 3.3, в данном случае $\alpha = \varphi$. Угловая скорость вращения земного шара $\omega = 2\pi / T$, где T – период обращения Земли, равный одним суткам. Отсюда

$$a_k = \frac{4\pi}{T} v' \sin \varphi \approx 0,7 \cdot 10^{-3} \text{ м/с}^2.$$

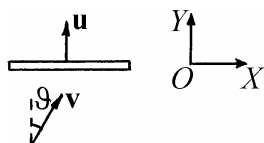


Рис. 3.4

Пример 3.6. Маленький шарик, движущийся со скоростью v , упруго ударяется о гладкую массивную плиту, движущуюся со скоростью u , как показано на рис. 3.4. Вектор v и нормаль n к плите составляют между собой угол θ . Вектор u на-

правлен по нормали к плите. Какова будет величина v_1 скорости шарика после удара?

Решение. В системе отсчета, связанной с плитой, составляющая скорости шарика, параллельная плите, при ударе не меняется, а составляющая скорости, перпендикулярная плите, меняет свое направление на противоположное. Направим ось OX вдоль плиты, а ось OY по нормали к плите. В неподвижной системе отсчета декартовы проекции скорости шарика перед ударом равны:

$$v_x = v \sin \vartheta, \quad v_y = v \cos \vartheta. \quad (3.20)$$

Согласно правилу сложения скоростей, в системе отсчета, связанной с плитой, декартовы проекции скорости шарика перед ударом:

$$v'_x = v_x, \quad v'_y = v_y - u. \quad (3.21)$$

В этой же системе отсчета после удара

$$v'_{1x} = v'_x, \quad v'_{1y} = -v'_y. \quad (3.22)$$

Переходя снова в неподвижную систему отсчета, получим

$$v_{1x} = v'_{1x}, \quad v_{1y} = v'_{1y} + u. \quad (3.23)$$

Из формул (3.20) – (3.23) следует, что

$$v_{1x} = v \sin \vartheta, \quad v_{1y} = 2u - v \cos \vartheta.$$

и, следовательно,

$$v_1 = \sqrt{v_{1x}^2 + v_{1y}^2} = \sqrt{v^2 + 4u^2 - 4uv \cos \vartheta}.$$

Задание для самостоятельной работы

3.7. Корабль идет на запад со скоростью v . Известно, что ветер дует с юго-запада. Скорость ветра, измеренная относительно палубы корабля, равна u_0 . Найти скорость ветра u относительно земли.

3.8. Автомобиль, движущийся по горизонтальной дороге, попадает под дождь, капли которого падают на землю вертикально с постоянной скоростью. Известно, что при скорости автомобиля $v_1 = 36$ км/час в его наклонное лобовое стекло попадает $n_1 = 200$ дождевых капель в секунду, а при скорости $v_2 = 72$ км/час это число возрастает до $n_2 = 300$ капель в секунду. Сколько капель n_0 будет попадать в лобовое стекло за 1 секунду, если автомобиль остановится?

3.9. Тело 1 начинает двигаться из точки A по направлению к точке B со скоростью v_1 . Одновременно тело 2 начинает двигаться из точки B по направлению к точке C со скоростью v_2 . Расстояние $AB = L$. Острый $\angle ABC = \alpha$. Каким будет минимальное расстояние l между телами?

3.10. Два упругих шарика – большой и маленький – падают вертикально вниз так, что маленький шарик лежит сверху на большом. После упругого удара о горизонтальную поверхность большой шарик начинает двигаться вверх со скоростью V . С какой скоростью v начнет двигаться вверх маленький шарик? Масса маленького шарика пренебрежимо мала по сравнению с массой большого.



Рис. 3.5

3.11. Маленький шарик, движущийся со скоростью v , упруго ударяется о гладкую массивную плиту, движущуюся со скоростью u , как показано на рис. 3.5. Вектор v и нормаль к плите составляют между собой угол θ . Какова будет скорость шарика v_1 после удара?

3.12. Катер, движущийся со скоростью v_1 , буксирует спортсмена на водных лыжах (рис. 3.6). В некоторый момент времени трос, за который держится спортсмен, составляет с направлением движения катера угол α , а направление скорости спортсмена, обозначенной на рисунке через v_2 , образует с тросом угол β . Чему равна величина $v_{\text{отн}}$ скорости спортсмена относительно катера в этот момент времени? Длина троса l .

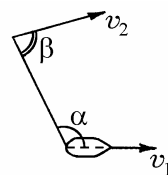


Рис. 3.6

3.13. Определить направление кориолисова ускорения для тела, движущегося по поверхности Земли в северном полушарии.

3.14. Автобус A движется по участку шоссе, образующему дугу окружности радиусом $R = 300$ м, а автобус B – по прямолинейному участку (рис. 3.7). Кратчайшее расстояние между закругленным и прямолинейным участками шоссе $d = 100$ м. Найти величину скорости автобуса B относительно автобуса A в момент когда расстояние между автобусами равно d . Величины скоростей каждого из автобусов относительно Земли $v_A = v_B = v = 60$ км/ч.

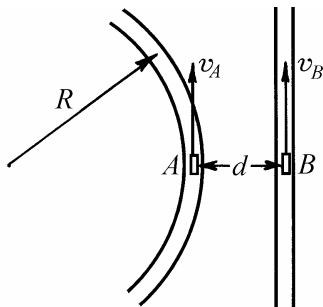


Рис. 3.7

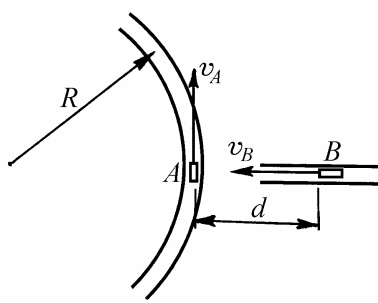


Рис. 3.8

3.15. Автобус A движется по участку шоссе, образующему дугу окружности радиусом $R = 300$ м, а автобус B – по прямолинейному участку (рис. 3.8). Продолжение прямолинейного участка проходит через центр дуги. Найти величину скорости автобуса B относительно автобуса A в момент когда рас-

стояние между ними равно $d = 200$ м. Величины скоростей каждого из автобусов относительно Земли $v_A = v_B = v = 60$ км/ч.

3.16. Космический корабль, имеющий форму кругового цилиндра, совершает межпланетный перелет с постоянной скоростью. Он приведен во враще-

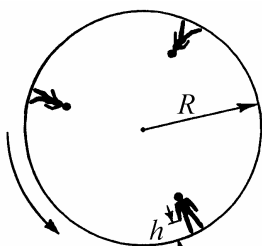


Рис. 3.9

ние вокруг продольной оси для создания на борту искусственной тяжести. При этом "полом" для космонавтов является внутренняя поверхность корпуса корабля (рис. 3.9). Космонавт, стоящий на полу, выпускает из руки небольшой предмет. На каком расстоянии l от ног космонавта, измеренном вдоль пола, этот предмет упадет на пол? Радиус корпуса корабля R , высота, с которой падает предмет h . Влиянием всех небесных тел и

силой притяжения предмета к кораблю пренебречь. Сопротивление воздуха не учитывать. Угловая скорость вращения корабля постоянна.

§4. Динамика материальной точки. Законы Ньютона

Краткие теоретические сведения

В динамике изучается влияние взаимодействия между телами на их механическое движение. Основная задача динамики состоит в определении положений тел и их скоростей в произвольный момент времени по известным начальным положениям тел, их начальным скоростям и силам, действующим на тела.

Механическое действие одного тела на другое происходит как при непосредственном соприкосновении тел, так и на расстоянии. Оно проявляется как в появлении деформаций у взаимодействующих тел, так и в возникновении у тел ускорений.

Важным понятием механики является понятие о свободном (изолированном) теле. Свободным называется тело, на которое не действуют какие-либо другие тела или поля, или тело, внешние воздействия на которое уравновешены (скомпенсированы).

Первый закон Ньютона постулирует существование особого класса систем отсчета, называемых инерциальными. В этих системах отсчета свободное тело сохраняет состояние покоя или прямолинейного равномерного движения. Особое значение инерциальных систем отсчета состоит в том, что в этих системах механические явления описываются наиболее просто.

Свободным можно считать тело, достаточно удаленное от других тел. Для того, чтобы выяснить, в какой степени данную систему можно считать инерциальной, нужно из этой системы наблюдать за свободным телом (например, за уединенной звездой). Чем ближе к нулю ускорение этого тела, тем с большей точностью можно считать данную систему отсчета инерциальной.

Из известных в настоящее время систем отсчета наиболее близка к инерциальной гелиоцентрическая система, связанная с центром Солнца. Для описания многих механических движений в земных условиях инерциальной можно считать систему отсчета, связанную либо с поверхностью

Земли, либо с ее центром (геоцентрическая система отсчета). При этом пренебрегают ускорением этой системы, связанным с вращательным движением Земли вокруг собственной оси и вокруг Солнца.

Системы отсчета, в которых свободное тело не сохраняет скорость движения постоянной, называются неинерциальными. Неинерциальной является любая система отсчета, движущаяся с ускорением относительно инерциальной.

Принцип относительности Галилея гласит: при одинаковых начальных условиях любое механическое явление во всех инерциальных системах отсчета протекает одинаково.

В инерциальных системах отсчета ускорение тела, а также его деформации, могут быть вызваны только его взаимодействием с другими телами. Характеристикой действия одного тела на другое является сила. Силой называется векторная физическая величина, являющаяся мерой механического воздействия на тело со стороны других тел или полей. Сила полностью определена, если заданы ее модуль, направление и точка приложения.

В задачах механики основную роль играют гравитационные силы (силы тяготения), электромагнитные силы, силы упругости и силы трения. Сравнение сил производится на основании следующего утверждения, являющегося определением равенства сил в механике: две силы, независимо от их природы, считаются равными по модулю и противоположно направленными, если их одновременное действие на тело не меняет его состояния покоя или равномерного прямолинейного движения. Величина силы измеряется по степени деформации специального пробного тела. Таким телом может служить калиброванная пружина.

Если на материальную точку действует несколько сил в разных направлениях, то, как показывает опыт, их действие можно заменить действием одной силы, называемой равнодействующей, величина и направление которой определяется по правилу сложения векторов (рис. 4.1).

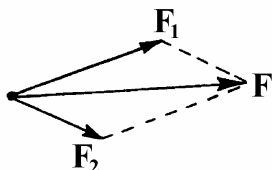


Рис. 4.1. Сложение сил

Свойство свободного тела сохранять состояние покоя или равномерного прямоли-

нейного движения называется инертностью. Скалярная физическая величина, являющаяся мерой инертности тела, называется массой тела. Она служит количественной характеристикой отклика тела на воздействие на него других тел. Чем больше масса тела, тем меньшее ускорение приобретает это тело под действием одной и той же силы.

Измерение массы тела, т.е. сравнение его массы с эталоном массы основывается на следующем утверждении, являющемся обобщением многочисленных опытных данных: в инерциальной системе отсчета отношение масс взаимодействующих тел равно обратному отношению модулей их ускорений.

Основой динамики является второй закон Ньютона, согласно которому в инерциальной системе отсчета произведение массы материальной точки на ее ускорение равно векторной сумме действующих на точку сил:

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F}. \quad (4.1)$$

Вводя понятие импульса материальной точки $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$, можно записать второй закон Ньютона в ином виде, который в ряде задач оказывается более удобным:

$$\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{F}. \quad (4.2)$$

Из (4.2) следует, что изменение импульса $\Delta\mathbf{p}$ материальной точки за время Δt , в течение которого сумму сил $\mathbf{F}$ можно считать постоянной, равно

$$\Delta\mathbf{p} = \mathbf{F}\Delta t. \quad (4.3)$$

Согласно третьему закону Ньютона при любом взаимодействии двух тел сила, действующая со стороны одного тела на другое, равна по величине и противоположна по направлению силе, действующей со стороны второго тела на первое. Эти силы направлены вдоль прямой, соединяющей точки их приложения, и всегда имеют одну и ту же физическую природу. Третий закон Ньютона утверждает, что силы взаимодействия всегда появляются попарно. Если в инерциальной системе отсчета на какое-то тело

являются попарно. Если в инерциальной системе отсчета на какое-то тело действует сила, то обязательно есть какое-то другое тело, на которое первое тело действует с такой же по модулю силой, но направленной в противоположную сторону. Всегда следует помнить, что силы, появляющиеся при взаимодействии тел, приложены к разным телам и поэтому не могут уравновешивать друг друга. Уравновешиваться могут только силы, приложенные к одному телу.

Гравитационные силы подчиняются закону всемирного тяготения, согласно которому две материальные точки массами m_1 и m_2 притягиваются друг к другу с силой, прямо пропорциональной произведению их масс, обратно пропорциональной квадрату расстояния r между ними и направленной по прямой, соединяющей эти точки:

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}, \quad (4.4)$$

где $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Н} \cdot \text{м}^2 / \text{кг}^2$ – гравитационная постоянная.

С помощью закона всемирного тяготения может быть вычислена сила притяжения протяженных тел произвольной формы. Для этого нужно мысленно разбить оба тела на малые элементы, которые можно считать материальными точками, и найти сумму сил притяжения между каждой парой элементов, принадлежащих разным телам.

Эта задача имеет простое решение, описываемое формулой (4.4), в следующих случаях: 1) если оба тела являются однородными шарами, тогда m_1 и m_2 – их массы, r – расстояние между центрами шаров; 2) одно из тел является однородным шаром, второе – материальной точкой; тогда m_1 и m_2 – их массы, r – расстояние от материальной точки до центра шара

Силы упругости возникают при деформации упругого тела и направлены в сторону, противоположную деформации. Они действуют между соприкасающимися слоями деформируемого тела, а также в месте контакта деформируемого тела с телом, вызывающим деформацию. При одномерных (линейных) деформациях растяжения или сжатия силы упругости направлены вдоль линии действия внешней силы, т.е. вдоль осей продольно дефор-

мируемых нитей, витых пружин, стержней и т. п., или перпендикулярно поверхности соприкасающихся тел.

Закон Гука устанавливает прямую пропорциональную зависимость величины силы упругости, возникающей при деформации тела, от величины деформации. Для пружины он имеет вид

$$F = k|x|, \quad (4.5)$$

где $x = l - l_0$, l – длина деформированной пружины, l_0 – длина свободной пружины, k – коэффициент жесткости пружины. Поскольку сила упругости направлена противоположно деформации, в проекции на координатную ось Ox закон Гука имеет вид:

$$F_x = -kx. \quad (4.6)$$

Жесткость пружины зависит как от формы пружины, так и от упругих свойств материала, из которого она изготовлена.

Для тонкого однородного упругого стержня длиной l_0 и площадью поперечного сечения S , деформированного силой F , направленной вдоль его оси, величина относительной деформации $|\varepsilon| = |l - l_0|/l_0$ связана с напряжением $\sigma = F/S$ соотношением

$$\sigma = E|\varepsilon|, \quad (4.7)$$

которое иногда называют законом Гука в дифференциальной форме. Здесь E – модуль упругости материала, или модуль Юнга. Сравнение (4.5) и (4.7) показывает, что коэффициент жесткости стержня выражается формулой

$$k = \frac{S}{l_0} E, \quad (4.8)$$

При взаимном перемещении соприкасающихся твердых тел, а так-

же при движении тел в вязкой среде (жидкости или газе) возникают силы трения. Эти силы зависят от скорости движения тел относительно друг друга, или от относительной скорости тела и вязкой среды, и направлены вдоль поверхностей соприкосновения тел.

Трение между поверхностями соприкасающихся твердых тел при отсутствии между ними жидкой или газообразной прослойки называется сухим трением. Сухое трение подразделяется на трение покоя и трение скольжения. Силы трения, возникающие между поверхностями твердых тел, неподвижных относительно друг друга, называются силами трения покоя. Как показывает опыт, величина силы трения покоя изменяется от нуля до некоторого максимального значения. Силы трения скольжения возникают при движении одного твердого тела по поверхности другого. Сила трения скольжения направлена против скорости относительного движения трущихся поверхностей.

Законы сухого трения имеют следующий вид:

- 1) Величина силы трения скольжения пропорциональна величине нормальной составляющей силы, с которой трущиеся поверхности прижимаются друг к другу:

$$F_{\text{тр}} = \mu N. \quad (4.9)$$

- 2) Коэффициент трения μ не зависит от площади соприкасающихся поверхностей и от скорости их относительного движения.
- 3) Максимальная величина силы трения покоя равна величине силы трения скольжения.

Для простейшей модели сухого трения график зависимости проекции силы трения на координатную ось OX , направленную вдоль перемещения трущихся поверхностей, от проекции на эту же ось скорости их относительного движения изображен на рис. 4.2.

При движении тел в жидкости или газе возникают силы вязкого трения. Они зависят от размеров и формы тела, свойств среды и от скорости относительного движения. В простейшей модели вязкого трения, примени-

мой при малых скоростях движения,

$$\mathbf{F}_{\text{тр}} = -\beta \mathbf{v}, \quad (4.10)$$

где β – коэффициент вязкого трения. Сила вязкого трения всегда направлена против относительной скорости тела и среды $\mathbf{v}$ (рис. 4.3). В отличие от трения между сухими поверхностями, при движении тел в вязкой среде трение покоя отсутствует.

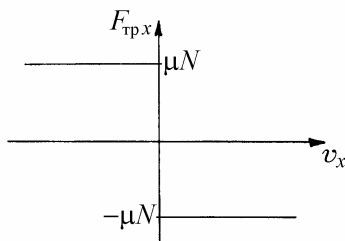


Рис. 4.2. Сухое трение

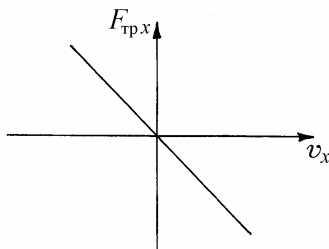


Рис. 4.3. Вязкое трение

Примеры решения задач

Пример 4.1. На шероховатой горизонтальной поверхности покоится брусок массой m . Коэффициент трения между бруском и поверхностью μ . В момент времени $t = 0$ на брусок начинает действовать горизонтальная сила, меняющаяся со временем по закону $\mathbf{F} = \mathbf{b}t$, где $\mathbf{b}$ – постоянный вектор. Найти путь, пройденный бруском за время τ после начала действия силы.

Решение. Для сухого трения характерно так называемое явление застоя, которое связано с тем, что зависимость величины силы трения $F_{\text{до}}$ от величины приложенной к бруску силы F имеет вид:

$$F_{\text{тр}} = \begin{cases} F & \text{при } F \leq \mu N, \\ \mu N & \text{при } F > \mu N, \end{cases}$$

где $-N$ сила нормального давления бруска на поверхность скольжения. Поэтому брусок будет покоиться при $F \leq \mu mg$ и начнет двигаться, когда F станет больше μmg . Учитывая, что $F = bt$, найдем момент времени t_0 , в который начнется движение:

$$t_0 = \frac{\mu mg}{b}.$$

Таким образом, уравнение движения бруска имеет вид:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= 0 && \text{при } t \leq t_0, \\ m\ddot{x} &= bt - \mu mg && \text{при } t > t_0. \end{aligned}$$

Последнее уравнение можно представить в виде

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{b}{m}t - \mu g = \frac{b}{m}(t - t_0).$$

Дважды интегрируя это уравнение, с учетом начальных условий получаем:

$$x(t) = \frac{a}{6m}(t - t_0)^3.$$

Окончательно,

$$x(\tau) = \begin{cases} 0 & \text{при } \tau \leq \frac{\mu mg}{b}, \\ \frac{b}{6m} \left(\tau - \frac{\mu mg}{b} \right)^3 & \text{при } \tau > \frac{\mu mg}{b}. \end{cases}$$

Пример 4.2. Как будет изменяться во времени скорость тела, брошенного вертикально вверх с начальной скоростью v_0 ? Считать, что сила сопротив-

ления воздуха пропорциональна скорости и коэффициент сопротивления равен β . Ускорение свободного падения g .

Решение. В проекции на вертикальную ось OY , направленную вверх, уравнение движения тела и начальное условие имеют вид:

$$m \frac{dv_y}{dt} = -mg - \beta v_y, \quad v_y(0) = v_0.$$

Разделяя переменные v_y и t , получаем:

$$\frac{dv_y}{mg + \beta v_y} = -\frac{dt}{m}.$$

Интегрирование левой и правой частей последнего выражения дает:

$$\frac{1}{\beta} \ln(mg + \beta v_y) + \frac{1}{\beta} \ln C = -\frac{1}{m} t,$$

где C – постоянная интегрирования. Используя начальное условие, находим, что

$$C = \frac{1}{mg + \beta v_0}.$$

Окончательно,

$$\ln \left(\frac{mg + \beta v_y}{mg + \beta v_0} \right) = -\frac{\beta}{m} t.$$

Потенцирование последнего выражения дает ответ:

$$v_y = \frac{mg}{\beta} \left[\left(1 + \frac{\beta}{mg} v_0 \right) e^{-\frac{\beta}{m} t} - 1 \right].$$

График полученной зависимости скорости тела от времени изображен на рис. 4.4 сплошной линией. Анализ ответа показывает, что при $t \rightarrow \infty$ (когда тело может падать вниз неограниченно долго, например в шахту, находящуюся под местом бросания), скорость тела асимптотически стремится к установившемуся значению $v_{\text{уст}} = -mg/\beta$. При этом значении скорости достигается равенство величин силы сопротивления и силы тяжести. Когда тело движется вниз, эти силы направлены противоположно друг другу и при $v_y = v_{\text{уст}}$ компенсируют друг друга; движение тела начиная с этого момента происходит с постоянной скоростью.

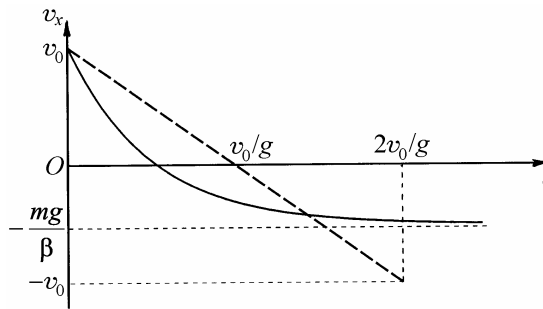


Рис. 4.4

Исследуем поведение решения при $\beta \rightarrow 0$. Для этого разложим содержащуюся в нем экспоненту в ряд по степеням малого параметра $\beta t/m \ll 1$:

$$v_y = \frac{mg}{\beta} \left[\left(1 + \frac{\beta}{mg} v_0 \right) \left(1 - \frac{\beta}{m} t + o\left(\frac{\beta}{m} t \right) \right) - 1 \right] = v_0 - gt + o\left(\frac{\beta}{m} t \right).$$

Как и следовало ожидать, при $\beta \rightarrow 0$ последнее выражение переходит в формулу для скорости свободно падающего тела без учета сопротивления воздуха: $v_y = v_0 - gt$. Соответствующая зависимость изображена на рис. 4.4 штриховой линией.

Пример 4.3. Маленький шарик массой m , подвешенный на нити, отвели в сторону так, что нить образовала прямой угол с вертикалью, и отпустили без начальной скорости. Пренебрегая сопротивлением воздуха, найти:

- 1) величины полного ускорения шарика и силы натяжения нити в зависимости от угла отклонения нити от вертикали ϑ ;
- 2) величину силы натяжения нити в момент, когда вертикальная составляющая скорости шарика максимальна.

Решение. Шарик движется по дуге окружности под действием двух сил: силы тяжести mg и натяжения нити T (рис. 4.5). В проекциях на касательную и нормаль к траектории шарика уравнение его движения имеет вид:

$$ma_\tau = mg \sin \vartheta, \quad ma_n = T - mg \cos \vartheta,$$

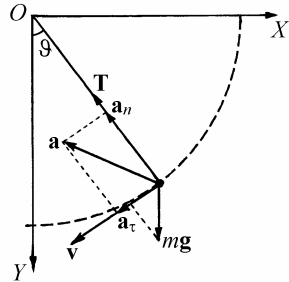


Рис. 4.5

причем $a_n = v^2 / l$, где v – скорость шарика, l – длина нити. Из закона сохранения энергии следует, что

$$mgl = \frac{mv^2}{2} + mgl(1 - \cos \vartheta),$$

откуда $v^2 = 2gl \cos \vartheta$. Объединяя записанные равенства, получаем

$$a_\tau = g \sin \vartheta, \quad a_n = 2g \cos \vartheta, \quad a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = g\sqrt{1 + 3\cos^2 \vartheta}, \quad T = 3mg \cos \vartheta.$$

Проекция скорости шарика на ось OY равна

$$v_y = v \sin \vartheta = \sqrt{2gl \cos \vartheta} \sin \vartheta.$$

Чтобы найти максимум этой величины, вычислим производную

$$\frac{dv_y}{d\vartheta} = \sqrt{2gl} \left(-\frac{\sin^2 \vartheta}{2\sqrt{\cos \vartheta}} + \sqrt{\cos \vartheta} \sin \vartheta \right) = \sqrt{\frac{2gl}{\cos \vartheta}} \left(\cos^2 \vartheta - \frac{1}{2} \sin^2 \vartheta \right).$$

Значение угла ϑ_0 , при котором $dv_y/d\vartheta = 0$, определяется выражением

$\cos^2 \vartheta_0 = \frac{1}{3}$. Следовательно, величина натяжения нити в момент, когда

вертикальная составляющая скорости шарика максимальна, $T = \sqrt{3}mg$.

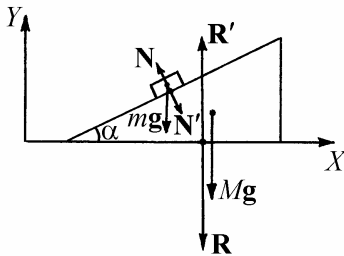


Рис. 4.6

Пример 4.4. На горизонтальной плоскости лежит клин массой M с углом α при вершине, а на верхней грани клина располагается брусок массой m (рис. 4.6). Все поверхности идеально гладкие. Оба тела отпускают, после чего они начинают движение. Найти горизонтальные ускорения клина и бруска и силу R , с которой клин давит на плоскость.

Решение. Система движется под действием сил, изображенных на рис. 4.6, где mg и Mg – силы тяжести, N и N' – силы взаимодействия между бруском и клином, R и R' – силы взаимодействия между клином и плоскостью. Обозначим через a_1 ускорение бруска, а через a_2 – ускорение клина. Уравнения движения тел, записанные в проекциях на оси координат, имеют вид:

$$ma_{1x} = -N_x = -N \sin \alpha,$$

$$ma_{1y} = N_y - mg = N \cos \alpha - mg, \quad (4.7)$$

$$Ma_{2x} = N'_x = N' \sin \alpha.$$

Согласно третьему закону Ньютона $\mathbf{N} = -\mathbf{N}'$, причем направления этих сил уже учтены в системе уравнений движения. Поэтому эта система должна быть дополнена соотношением между модулями сил реакции: $N' = N$.

Ускорения тел не являются независимыми, поскольку брусок по условию задачи все время находится на поверхности клина. Следовательно, координаты бруска x_1, y_1 и координата острия клина x_2 , которую удобно использовать как характеристику его положения на плоскости, связаны соотношением (см. рис. 4.7).

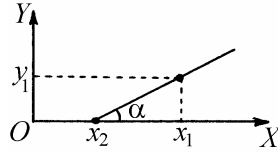


Рис. 4.7

$$y_1 = (x_1 - x_2) \operatorname{tg} \alpha.$$

Дважды дифференцируя это соотношение по времени, находим связь между проекциями ускорений:

$$a_{1y} = (a_{1x} - a_{2x}) \operatorname{tg} \alpha. \quad (4.8)$$

Для того, чтобы решить полученную систему уравнений, выразим из (4.7) проекции ускорений:

$$a_{1x} = -\frac{N}{m} \sin \alpha, \quad a_{1y} = \frac{N}{m \cos \alpha} - g, \quad a_{2x} = \frac{N}{M} \sin \alpha$$

и подставим в (4.8):

$$\frac{N}{m} \cos \alpha - g = -N \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{M} \right) \sin \alpha \operatorname{tg} \alpha.$$

Отсюда

$$N = \frac{mM \cos \alpha}{M + m \sin^2 \alpha} g.$$

Используя полученное выражение для N , найдем проекции ускорений:

$$a_{1x} = \frac{M \sin \alpha \cos \alpha}{M + m \sin^2 \alpha} g, \quad a_{2x} = \frac{m \sin \alpha \cos \alpha}{M + m \sin^2 \alpha} g.$$

Величину силы давления клина на плоскость определим из условия уравновешенности вертикальных проекций сил, действующих на клин:

$$R = R' = Mg + N_y = Mg + N \cos \alpha = \frac{M(M + m)}{M + m \sin^2 \alpha} g.$$

Пример 4.5. Найти ускорения грузиков и натяжения нитей в системе, изображенной на рис. 4.8. Считать, что нити нерастяжимы и грузики совершают только вертикальные перемещения. Массой нитей и блоков пренебречь, трение и сопротивление воздуха не учитывать.

Решение. В проекции на вертикальную координатную ось, направленную вниз, уравнения движения грузиков имеют вид:

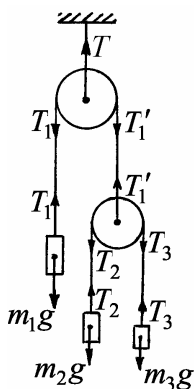


Рис.4.8

$$m_1 a_1 = m_1 g - T_1, \quad m_2 a_2 = m_2 g - T_2, \quad m_3 a_3 = m_3 g - T_3.$$

Из невесомости нитей и блоков вытекают следующие соотношения между силами натяжения:

$$T_1' = T_1, \quad T_3 = T_2, \quad T_1 = 2T_2.$$

Условие нерастяжимости нитей накладывает кинематическую связь на ускорения грузиков (см. задачу 1.10):

$$2a_1 + a_2 + a_3 = 0.$$

Решая полученную систему уравнений, находим ответ:

$$T_1 = \frac{8gm_1m_2m_3}{4m_2m_3 + m_1(m_2 + m_3)}, \quad T_2 = \frac{1}{2}T_1,$$

$$a_1 = \frac{m_1(m_2 + m_3) - 4m_2m_3}{4m_2m_3 + m_1(m_2 + m_3)}g, \quad a_2 = \frac{4m_2m_3 + m_1(m_2 - 3m_3)}{4m_2m_3 + m_1(m_2 + m_3)}g,$$

$$a_3 = \frac{4m_2m_3 + m_1(m_3 - 3m_2)}{4m_2m_3 + m_1(m_2 + m_3)}g.$$

Задание для самостоятельной работы

4.6. Лодка под парусом развила скорость v_0 . Как будет убывать скорость лодки в спокойной воде после спуска паруса, если сопротивление воды пропорционально скорости и коэффициент сопротивления равен β ? Какой путь лодка пройдет до полной остановки? Масса лодки m .

4.7. Из неподвижного облака через интервал времени τ одна за другой начинают падать две дождевые капли массой m каждая. Как будет изменяться со временем расстояние между ними? Решить задачу для двух случаев: 1) полагая, что сопротивление воздуха пренебрежимо мало; 2) полагая, что сопротивление воздуха пропорционально скорости капель и коэффициент сопротивления равен β . Ускорение свободного падения g .

4.8. Материальная точка массой m движется по окружности радиусом R . Найти модуль среднего вектора силы $|\mathbf{F}_{\text{ср}}|$, действующей на эту точку на пути, равном четверти длины окружности, если точка движется: 1) равномерно со скоростью v ; 2) с постоянным по величине тангенциальным ускорением a_τ без начальной скорости.

4.9. Кусок однородного каната висит вертикально, причем его нижний ко-

нец касается горизонтального стола. Найти силу F давления каната на стол при его падении, выразив ее через вес P_1 части каната, уже лежащей на столе.

4.10. На гладкую сферическую поверхность радиусом R положили цепочку длиной l ($l < \pi R / 2$) и закрепили один из ее концов на вершине сферы. С каким по величине ускорением начнет двигаться цепочка, если ее верхний конец освободить?

4.11. Маленькое тело соскальзывает без начальной скорости по внутренней поверхности полусферы с высоты, равной ее радиусу (рис. 4.9). Одна половина полусферы абсолютно гладкая, а другая – шероховатая, причем на этой половине коэффициент трения между телом и поверхностью $\mu = 0,15$. Определить ускорение a тела в тот момент, когда оно только перейдет на шероховатую поверхность. Ускорение свободного падения принять $g = 10 \text{ м/с}^2$.

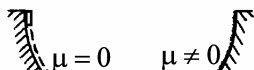


Рис. 4.9

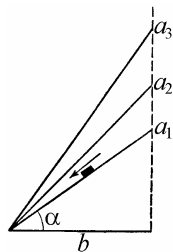


Рис. 4.10

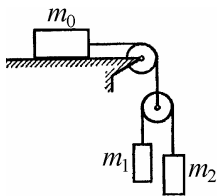


Рис. 4.11

4.12. Несколько наклонных плоскостей ($a_1, a_2, \dots$) имеют общее основание, но разные углы наклона (рис. 4.10). Каков должен быть угол α наклона плоскости к горизонту, чтобы время соскальзывания небольшого тела с ее вершины было минимальным? Коэффициент трения между телом и плоскостью μ .

4.13. В системе, изображенной на рис. 4.11, массы тел равны m_0, m_1, m_2 , трение отсутствует, массы блоков и нитей пренебрежимо малы. Найти ускорение тела массой m_1 . При каком условии оно равно нулю?

4.14. Через легкий, вращающийся без трения блок перекинут шнурок. На одном конце шнурка привязан груз массой m_1 . По другому концу шнурка с

постоянным относительно шнура ускорением a_2 скользит кольцо массой m_2 . Найти ускорение a_1 груза m_1 и силу трения R кольца о шнурок. Массой шнура пренебречь.

4.15. Два блока подвешены на динамометре, как показано на рис. 4.12. К свободному концу нити, пропущенной через блоки, прикреплен груз массой m , на подвижном блоке висит груз массой M . В некоторый момент грузы предоставили самим себе. Найти показание динамометра при движении грузов. Массы блоков пренебрежимо малы.

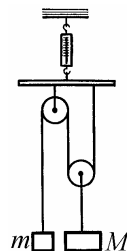


Рис. 4.12

4.16. Максимальная скорость, с которой велосипедист может пройти поворот радиусом R на велотреке с горизонтально расположенным дорожным полотном, равна v . С какой максимальной скоростью u велосипедист может пройти такой же поворот на треке с дорожным полотном, расположенным под углом α к горизонтали?

§5. Законы сохранения импульса и энергии

Краткие теоретические сведения

Результаты некоторых механических процессов не зависят от того, как развивается процесс во времени. Например, если сопротивление воздуха пренебрежимо мало, то тело, брошенное вертикально вверх, вернется в точку броска с начальной скоростью независимо от того, как долго продолжался полет. При выстреле пушка приобретает импульс отдачи, зависящий только от массы и скорости снаряда, но не зависящий от длины ствола и т.п. Теория, основанная на законах Ньютона, предсказывает существование в таких процессах сохраняющихся величин, к числу которых относятся импульс и энергия.

Импульсом материальной точки называется произведение массы этой точки на ее скорость:

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v}. \quad (5.1)$$

Импульсом системы частиц называется сумма импульсов отдельных частиц системы:

$$\mathbf{p} = \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_i. \quad (5.2)$$

Важную роль в механике играет понятие центра масс системы частиц. Так называется воображаемая точка, радиус-вектор которой определяется формулой

$$\mathbf{r}_c = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i. \quad (5.3)$$

Здесь m_i – масса отдельной частицы, $\mathbf{r}_i$ – ее радиус-вектор, $m = \sum_{i=1}^N m_i$ – полная масса системы. Скорость и ускорение центра масс описываются выражениями

$$\mathbf{v}_c = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_i, \quad \mathbf{a}_c = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{a}_i. \quad (5.4)$$

Используя понятие центра масс, импульс системы тел можно записать в виде:

$$\mathbf{p} = m \mathbf{v}_c. \quad (5.5)$$

По отношению к данной механической системе все силы делятся на внутренние и внешние. Внутренними силами называются силы взаимодействия между телами системы, внешними – силы, действующие на тела системы со стороны тел, не входящих в данную систему. Из законов Ньютона следует закон изменения импульса: скорость изменения импульса системы тел равна сумме внешних сил:

$$\dot{\mathbf{p}} = m \dot{\mathbf{v}}_c = \mathbf{F}_{\text{внешн}}. \quad (5.6)$$

Этот закон можно сформулировать также следующим образом: центр масс системы частиц движется так, как двигалась бы материальная точка, масса которой равна массе системы, если бы к этой точке были приложены все внешние силы. Последнее утверждение называют законом движения центра масс или теоремой о движении центра масс.

Согласно закону сохранения импульса, если сумма внешних сил равна нулю, то импульс механической системы сохраняется:

$$\mathbf{p} = \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_i = \text{const}. \quad (5.7)$$

Если внешние силы на систему действуют, но существует такая ось, например, ось OX , в проекции на которую сумма внешних сил равна нулю, то проекция импульса системы на эту ось сохраняется:

$$p_x = \sum_{i=1}^N m_i v_{ix} = \text{const} . \quad (5.8)$$

Заметим, что из сохранения импульса относительно какой-либо одной инерциальной системы отсчета и правила сложения скоростей следует сохранение импульса и относительно любой другой инерциальной системы.

Кинетической энергией материальной точки называется величина

$$K = \frac{1}{2} m v^2 , \quad (5.9)$$

Кинетической энергией системы частиц называется сумма кинетических энергий отдельных частиц:

$$K = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i v_i^2 .$$

Элементарной работой силы называется скалярное произведение силы на бесконечно малое перемещение точки приложения силы:

$$dA = \mathbf{F} d\mathbf{r} . \quad (5.10)$$

Работой силы на траектории $\mathcal{L}$ называется интеграл

$$A = \int_{\mathcal{L}} dA , \quad (5.11)$$

т.е. сумма элементарных работ, взятая по всем участкам траектории движения точки. Согласно теореме об изменении кинетической энергии, приращение кинетической энергии материальной точки равно элементарной работе действующей на нее силы:

$$dK = dA . \quad (5.12)$$

Если работа силы, действующей на материальную точку, равна нулю при перемещении этой точки по любой замкнутой траектории, то сила называется потенциальной. Математически условие потенциальности силы записывается в виде

$$\oint \mathbf{F} d\mathbf{r} = 0 . \quad (5.13)$$

Любое однородное или центральное силовое поле является потенциальным. Наиболее важные примеры потенциальных сил – сила тяжести, сила упругости, сила Кулона. В противоположность этому сила трения, работа которой по любому замкнутому пути всегда отлична от нуля, является непотенциальной силой.

Для сил, обладающих свойством (5.13), можно ввести потенциальную энергию Π . Приращение потенциальной энергии определяется как взятая со знаком минус элементарная работа потенциальной силы:

$$d\Pi = -\mathbf{F} d\mathbf{r} . \quad (5.14)$$

В соответствии с этим потенциальной энергией материальной точки в силовом поле называется интеграл

$$\Pi = \int d\Pi , \quad (5.15)$$

взятый по любому пути. Потенциальной энергией системы тел называется сумма потенциальных энергий отдельных тел системы во внешнем поле и энергия взаимодействия тел друг с другом:

$$\Pi = \sum_{i=1}^N \Pi_i + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^N \Pi_{ij} . \quad (5.16)$$

Заметим, что данное выше определение потенциальной энергии позволяет вычислить ее с точностью до произвольной постоянной, значение которой зависит от выбора начала отсчета (нулевого уровня) потенциальной энергии. Конкретный выбор нулевого уровня определяется удобством решения той или иной задачи. Например, рассматривая материальную точку массой m в однородном поле тяжести вблизи поверхности Земли, удобно отсчитывать потенциальную энергию относительно земной поверхности. В этом случае

$$\Pi = mgh , \quad (5.17)$$

где h – высота над поверхностью Земли, g – ускорение свободного падения. Эту же формулу можно использовать и для тел конечного размера, понимая под h высоту центра масс тела над поверхностью Земли. Потенциальная энергия упруго деформированной пружины

$$\Pi = \frac{1}{2} kx^2 , \quad (5.18)$$

где k – коэффициент упругости пружины, x – величина деформации, т.е. разность длины пружины в деформированном состоянии и длины свободной пружины.

Потенциальная энергия материальной точки массой m в поле силы тяготения

$$\Pi = -\frac{GMm}{r} , \quad (5.19)$$

где G – гравитационная постоянная, M – масса силового центра, r – расстояние от силового центра до материальной точки. Как видно из приведенной формулы, $\Pi(\infty) = 0$, т.е. начало отсчета потенциальной энергии выбрано в бесконечно удаленной точке.

Полной энергией системы называется сумма ее кинетической и потенциальной энергий

$$E = K + \Pi. \quad (5.20)$$

Изменение полной механической энергии системы равно работе непотенциальных сил:

$$dE = dA_{\text{нп}} \quad (5.21)$$

Это утверждение называется законом изменения полной механической энергии. Из него следует закон сохранения полной механической энергии: если работа непотенциальных сил равна нулю, то полная механическая энергия системы сохраняется:

$$E = \text{const} . \quad (5.22)$$

В рассматриваемых ниже задачах используются понятия абсолютно упругого и абсолютно неупругого ударов. Напомним, что абсолютно упругим называется удар, при котором кинетическая энергия взаимодействующих тел не меняется. Абсолютно неупругим называется удар, в результате которого скорости сталкивающихся тел становятся равными друг другу (тела слипаются).

Примеры решения задач

Пример 5.1. Два упругих шарика массами m_1 и m_2 движутся навстречу друг другу вдоль линии, соединяющей их центры. Начальные скорости шариков v_1 и v_2 . Найти скорости шариков после удара. Считать удар абсолютно уп-

ругим.

Решение. Поскольку система является изолированной, в ней выполняется закон сохранения импульса

$$m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2 = m_1 \mathbf{v}'_1 + m_2 \mathbf{v}'_2, \quad (5.23)$$

где $\mathbf{v}'_1$ и $\mathbf{v}'_2$ – скорости шариков после удара. При абсолютно упругом ударе сохраняется кинетическая энергия

$$\frac{mv_1^2}{2} + \frac{mv_2^2}{2} = \frac{mv_1'^2}{2} + \frac{mv_2'^2}{2}. \quad (5.24)$$

По условию задачи удар является центральным, поэтому скорости шариков до и после взаимодействия расположены на одной прямой. Направим ось OX вдоль линии, соединяющей центры шаров. Проектируя на эту ось векторное равенство (5.23), получим

$$m_1 v_{1x} + m_2 v_{2x} = m_1 v'_{1x} + m_2 v'_{2x}. \quad (5.25)$$

Равенство (5.24) можно представить в виде

$$m_1 v_{1x}^2 - m_1 v_{1x}'^2 = m_2 v_{2x}'^2 - m_2 v_{2x}^2. \quad (5.26)$$

Уравнения (5.25)–(5.26) позволяют определить искомые величины v'_{1x} и v'_{2x} . Перепишем эти уравнения следующим образом:

$$m_1 (v_{1x} - v'_{1x}) = m_2 (v'_{2x} - v_{2x}), \quad (5.27)$$

$$m_1 (v_{1x} - v'_{1x})(v_{1x} + v'_{1x}) = m_2 (v'_{2x} - v_{2x})(v'_{2x} + v_{2x}). \quad (5.28)$$

Система (5.27), (5.28) имеет два решения. Первое из них

$$v'_{1x} = v_{1x}, \quad v'_{2x} = v_{2x}$$

соответствует отсутствию удара между шариками. Если же удар происходит, то $v'_{1x} \neq v_{1x}$, $v'_{2x} \neq v_{2x}$. В этом случае можно разделить уравнение (5.28) на уравнение (5.27). Тогда получим

$$v'_{1x} + v_{1x} = v'_{2x} + v_{2x}. \quad (5.29)$$

Решая совместно линейные уравнения (5.27) и (5.29), находим

$$v'_{1x} = \frac{m_1 v_{1x} + m_2 (2v_{2x} - v_{1x})}{m_1 + m_2}, \quad v'_{2x} = \frac{m_2 v_{2x} + m_1 (2v_{1x} - v_{2x})}{m_1 + m_2}.$$

Пример 5.2. Шайба массой m и гладкая “горка” массой M , изображенные на рис. 5.1, могут перемещаться без трения по горизонтальной плоскости. Шайба скользит по плоскости с начальной скоростью v_0 и попадает на горку. При движении по горке шайба не отрывается от ее поверхности.

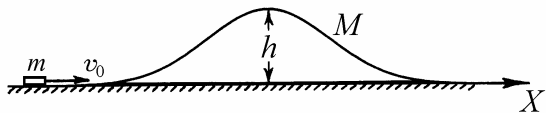


Рис. 5.1

Найти скорости обоих тел после того, как шайба покинет горку.

Решение. Направим ось OX вдоль горизонтальной плоскости, как показано на рис. 5.1. Обозначим через v и u скорости шарика и горки, которые будут иметь эти тела после того, как шарик покинет горку. Так как трения между горкой и горизонтальной плоскостью нет, внешние силы в горизонтальном направлении отсутствуют. Следовательно, в направлении оси OX импульс системы сохраняется:

$$mv_0 = mv_x + Mu_x. \quad (5.30)$$

Так как трение между шариком и горкой также отсутствует, выполняется закон сохранения энергии

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv_x^2}{2} + \frac{Mu_x^2}{2}. \quad (5.31)$$

Система уравнений (5.30), (5.31) имеет два решения (см. задачу 5.1):

$$v_x = v_0, \quad u_x = 0, \quad \text{и} \quad v_x = -v_0 \cdot \frac{M-m}{M+m}, \quad u_x = v_0 \cdot \frac{2m}{M+m}. \quad (5.32)$$

Первое из них соответствует скатыванию шайбы справа от горки, второе – скатыванию шайбы слева от горки. Остается определить условия, при которых реализуется тот или иной случай.

Пусть шайба достигает верхней точки горки и дальше перемещается вместе с ней как одно целое с некоторой скоростью U (модель неупругого взаимодействия). Обозначив соответствующую начальную скорость шайбы через V , имеем из законов сохранения импульса и энергии

$$mV = (M+m)U \quad \text{и} \quad \frac{mV^2}{2} = \frac{(M+m)U^2}{2} + mgh.$$

Отсюда находим

$$V = \sqrt{2gh \left(1 + \frac{m}{M}\right)}, \quad U = \frac{m}{M+m} \cdot V.$$

При неупругом взаимодействии кинетическая энергия в системе не сохраняется. Часть этой энергии переходит в другие формы (в данном случае запасается в виде потенциальной энергии шайбы). Если начальная скорость шайбы удовлетворяет условию $v_0 < V$, то шайба не достигнет верхней точ-

точки горки и после взаимодействия соскользнет с левой стороны. Если же $v_0 > V$, то шайба преодолеет верхнюю точку и соскользнет по правой стороне горки.

Пример 5.3. На гладком столе лежит доска массы M , на краю которой покоится шайба массой m (рис. 5.2). Между доской и столом трение отсутствует, а между шайбой и доской трение есть, причем коэффициент трения равен μ . Какую минимальную скорость нужно сообщить шайбе, чтобы пройдя по доске путь до уступа и обратно, она упала на стол? Длина доски до уступа равна l . Удар шайбы об уступ считать абсолютно упругим.

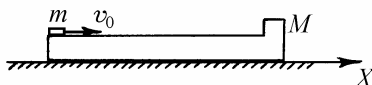


Рис. 5.2

Решение. Направим ось Ox вдоль начальной скорости шайбы, как показано на рис. 5.2. Сила трения между шайбой и доской является внутренней силой и не может изменить импульс системы; внешние силы в горизонтальном направлении на систему не действуют. Обозначим через v_0 такое значение начальной скорости шайбы, при котором она, пройдя путь до уступа и обратно, будет двигаться вместе с доской, находясь на самом ее краю. Из закона сохранения импульса следует

$$mv_0 = (M + m)v_x.$$

Так как в системе действует непотенциальная сила (сила трения между шайбой и доской), кинетическая энергия системы не сохраняется. Ее изменение

$$\Delta K = \frac{(M + m)v_x^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = A_{\text{тр}},$$

где $A_{\text{тр}}$ – работа силы трения. Эта величина определяется произведением силы трения скольжения $F = \mu mg$ на путь шайбы относительно доски $S = 2l$. Учитывая, что сила трения направлена всегда против относительно-

го перемещения трущихся поверхностей, можно записать

$$A_{\text{тр}} = -2\mu mgl.$$

Объединяя записанные равенства, находим

$$v_0 = 2\sqrt{\mu gl\left(1 + \frac{m}{M}\right)}.$$

В силу определения скорости v_0 шайба упадет с доски, если ее начальная скорость превысит величину v_0 .

Пример 5.4. По гладкой горизонтальной плоскости движется тележка массой M со скоростью u_0 (рис. 5.3). В

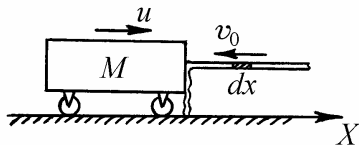


Рис. 5.3

момент времени $t = 0$ в ее переднюю стенку начинает бить горизонтальная струя воды, имеющая скорость v_0 . Площадь поперечного сечения струи S , плотность воды ρ . Найти, как будет

меняться со временем скорость тележки $u_x(t)$. Взаимодействие струи с тележкой считать абсолютно неупругим.

Решение. Направим ось OX вдоль начальной скорости тележки. Рассмотрим взаимодействие тележки с элементом струи массы dm . Поскольку взаимодействие неупругое, скорости тележки и воды после соударения совпадают. На основании закона сохранения импульса, можно записать

$$Mu_x - v_0 dm = (M + dm)(u_x + du_x), \quad (5.33)$$

где du_x — приращение скорости тележки в результате взаимодействия с данным элементом струи. Из уравнения (5.33) с точностью до членов первого порядка малости находим

$$M du_x = -(u_x + v_0) dm . \quad (5.34)$$

Масса элемента струи

$$dm = \rho S dx , \quad (5.35)$$

где dx – длина данного элемента. Она равна произведению скорости воды относительно тележки $v_{\text{отн}}$ на время взаимодействия dt :

$$dx = v_{\text{отн}} \cdot dt . \quad (5.36)$$

Согласно правилу сложения скоростей,

$$v_{\text{отн}} = v_0 + u_x . \quad (5.37)$$

Из уравнений (5.34) – (5.37) следует, что

$$du_x = -\beta (v_0 + u_x)^2 dt , \quad (5.38)$$

где введено обозначение

$$\beta = \frac{\rho S}{M} . \quad (5.39)$$

По условию задачи

$$u_x(0) = u_0 . \quad (5.40)$$

Интегрирование уравнения (5.38) с учетом начального условия (5.40) дает

$$\int_{u_0}^{u_x} \frac{du_x}{(v_0 + u_x)^2} = -\beta \int_0^t dt ,$$

откуда

$$u_x(t) = -v_0 + \frac{u_0 + v_0}{1 + (u_0 + v_0)\beta t}.$$

График зависимости скорости тележки от времени представлен на рис. 5.4. На этом графике время t_0 есть время, спустя которое тележка начнет двигаться в обратном направлении. Это время определяется формулой

$$t_0 = \frac{u_0}{(u_0 + v_0)\beta v_0}.$$

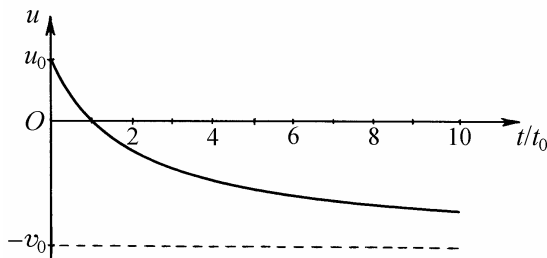


Рис. 5.4

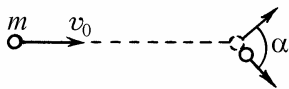


Рис. 5.5

Пример 5.5. Движущаяся частица испытывает упругое нецентрально столкновение с покоящейся частицей такой же массы. Найти угол, под которым разлетятся частицы после удара (рис. 5.5).

Решение. Для решения задачи удобно перейти в систему отсчета, связанную с центром масс частиц. Скорость центра масс равна:

$$\mathbf{v}_c = \frac{m\mathbf{v}}{2m} = \frac{\mathbf{v}}{2}.$$

Начальные скорости частиц в системе центра масс

$$u_1 = v_1 - v_c = \frac{v}{2}, \quad u_2 = v_2 - v_c = -\frac{v}{2}.$$

В этой системе отсчета частицы движутся навстречу друг другу с одинаковыми скоростями. Используя законы сохранения импульса и энергии, легко показать, что в системе отсчета, связанной с центром масс, частицы после столкновения имеют такие же по модулю скорости, т.е.

$$u'_1 = u_1, \quad u'_2 = u_2, \quad (5.41)$$

причем эти скорости направлены вдоль некоторой прямой, проходящей через центр масс, но повернутой относительно линии движения частиц до столкновения на некоторый угол (рис. 5.6). Отметим, что равенства (5.41) справедливы в общем случае для частиц произвольной массы.

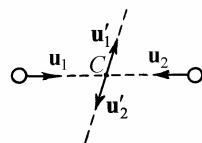


Рис. 5.6

Перейдем теперь вновь в неподвижную систему отсчета. Согласно правилу сложения скоростей, для этого необходимо прибавить к скоростям частиц после столкновения скорость центра масс:

$$v'_1 = u'_1 + v_c = u'_1 + \frac{v}{2}, \quad v'_2 = u'_2 + v_c = u'_2 + \frac{v}{2}.$$

Процедуру перехода в неподвижную систему отсчета иллюстрирует рис. 5.7, где учтено, что $u'_1 = u'_2 = v_c = v/2$. Из рисунка видно, что искомый угол α опирается на диаметр окружности, тогда как вершина угла лежит на окружности. Следовательно, $\alpha = \pi/2$.

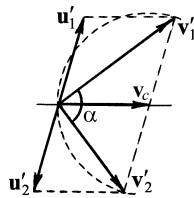


Рис. 5.7

Задание для самостоятельной работы

5.6. Найти изменение кинетической энергии ΔK и импульса Δp тела, движущегося со скоростью v , при упругом ударе его о стенку, движущуюся в том же направлении равномерно со скоростью u ($u < v$). Скорость шарика перпендикулярна стенке.

5.7. Клин массой M с углом при основании α покоится на гладкой горизон-

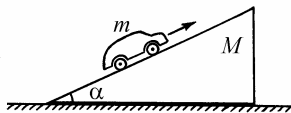


Рис. 5.8

тальной плоскости (рис. 5.8). На наклонную поверхность клина ставят заводной автомобиль массой m и отпускают без начальной скорости, после чего автомобиль начинает движение вверх по клину в плоскости рисунка. Най-

ти скорость u автомобиля относительно клина в тот момент, когда клин приобретает относительно плоскости скорость v .

5.8. Кузнечик сидит на одном из концов соломинки длиной l , покоящейся на гладком полу. С какой минимальной относительно пола скоростью v_0 он должен прыгнуть, чтобы при приземлении попасть точно на второй конец соломинки? Масса кузнечика в β раз больше массы соломинки. Размерами кузнечика и трением между полом и соломинкой пренебречь.

5.9. На концах лодки массой M и длиной l находятся два человека массами m_1 и m_2 . На сколько сместится лодка, если люди поменяются местами?

5.10. Движущаяся частица массой m налетает на покоящуюся частицу массой $3m$. После упругого соударения частица массой $3m$ отлетает под углом 45° к линии первоначального движения легкой частицы. Найти угол θ , под которым отлетает частица массой m .

5.11. Шайба A испытывает упругое соударение одновременно с шайбами B

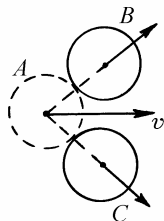


Рис.5.9

и C (рис. 5.9). Все три шайбы одинаковы. Первоначально шайба A движется со скоростью v_0 , а шайбы B и C покоятся. Расстояние между центрами шайб B и C до соударения было в β раз больше диаметра каждой шайбы. Найти скорость шайбы A после соударения. При каком значении параметра β шайба A отскочит назад, остановится, будет двигаться вперед?

5.12. Вагоны поезда на ходу наполняют углем, падающим вертикально вниз из бункера. Какова должна быть приложенная к вагону сила тяги F , если в него погружают $m = 10$ т угля за время $t_0 = 2$ с, и за это время вагон проходит равномерно путь $S = 10$ м? Вычислить работу A , совершенную локомо-

тивом за время t_0 и сравнить ее с кинетической энергией K , которую приобрел погруженный уголь. Трением при движении вагона пренебречь.

5.13. Сферическая чашка массой M покоится на гладкой горизонтальной поверхности (рис. 5.10). По внутренней поверхности чашки из положения A начинает скользить без начальной скорости маленькое тело массой m . Какую скорость v будет иметь чашка в тот момент, когда тело достигнет наинизшей точки (положение B)? Радиус чашки равен R . Трением между всеми поверхностями пренебречь.

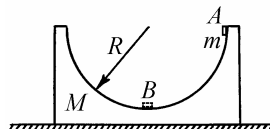


Рис. 5.10

5.14. Брусок массой m_1 соскальзывает без начальной скорости с высоты h по наклонной плоскости. Другой брусок массой m_2 движется по этой плоскости от основания вверх с начальной скоростью v_0 . Бруски начинают движение одновременно. На некоторой высоте бруски сталкиваются, после чего движутся как одно тело. Определить скорость v этого тела у основания наклонной плоскости. Трением пренебречь.

5.15. Два шарика массами m_1 и m_2 , покоящиеся на гладкой горизонтальной плоскости, связаны пружиной длиной l и жесткостью k . Шарiku массой m_1 сообщили скорость v_0 в направлении от шарика массой m_2 вдоль линии, соединяющей их центры. На какое максимальное расстояние L удалятся шарики друг от друга?

5.16. На гладком горизонтальном столе покоится трубка массой M и длиной L , закрытая с одного торца (рис. 5.11). В открытый конец трубки влетает маленький шарик массой m со скоростью, направленной вдоль оси трубки. После упругого удара о закрытый торец трубки шарик вылетает наружу. Какой путь S относительно стола пройдет шарик за время, которое он будет находиться внутри трубки? Размером шарика и трением между всеми поверхностями пренебречь.

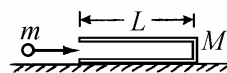


Рис. 5.11

§6. Релятивистская механика

Краткие теоретические сведения

Релятивистская механика – это механика быстрых частиц, скорости которых близки к скорости света. Такие частицы рождаются в ходе ядерных реакций, они присутствуют в недрах звезд, а также в космических лучах, их получают искусственно на ускорителях. Релятивистскую механику называют также теорией относительности, подчеркивая тем самым основополагающую роль принципа относительности в этой теории.

Обобщением результатов наблюдения движений тел со скоростями, малыми по сравнению со скоростью света, явился принцип относительности Галилея. Согласно этому принципу, никакими механическими опытами, проведенными внутри данной системы отсчета, нельзя установить, находится ли эта система в состоянии покоя или равномерного прямолинейного движения. Ему можно придать ясную математическую форму: уравнения, выражающие законы механики, должны быть инвариантны относительно преобразований, описывающих переход от неподвижной системы отсчета к системе, движущейся прямолинейно и равномерно. Такие преобразования получили название преобразований Галилея.

Рассмотрим две системы отсчета: неподвижную (S) и движущуюся (S'). Направление и скорость движения подвижной системы отсчета показаны на рис. 6.1. Пусть при $t = 0$ начала обеих систем отсчета совпадают. Тогда расстояние OO' между началами систем в любой момент времени t равно Vt , где V – скорость движения подвижной

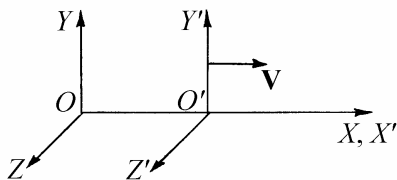


Рис. 6.1. Неподвижная и движущаяся системы отсчета

системы отсчета. Если некоторая материальная точка в момент времени t имеет в системе S' декартовы координаты x', y', z' , то ее координаты

x, y, z в системе S в этот же момент времени в соответствии с преобразованиями Галилея выражаются следующим образом:

$$x = x' + Vt, y = y', z = z'. \quad (6.1)$$

Из преобразований Галилея нетрудно вывести связь скоростей материальной точки относительно неподвижной и движущейся систем отсчета. Дифференцируя уравнения (6.1) по времени, получим

$$v_x = v'_x + V, v_y = v'_y, v_z = v'_z \quad (6.2)$$

Формулы (6.2) выражают классический закон сложения скоростей, согласно которому абсолютная скорость материальной точки равна сумме ее относительной скорости и скорости движущейся системы отсчета.

Принцип постоянства скорости света. В конце XIX века опытным путем было показано, что движение Земли по орбите вокруг Солнца не влияет на скорость света относительно Земли (Майкельсон и Морли, 1887). Этот результат позволил сформулировать следующий принцип, получивший название принципа постоянства скорости света: скорость света не зависит от того, по отношению к какой системе отсчета – покоящейся или движущейся – она определяется. Иными словами, абсолютная скорость света равна его относительной скорости по отношению к любой инерциальной системе отсчета. Например, если свет распространяется вдоль оси OX системы S , показанной на рис. 6.1, то для скоростей волнового фронта световой волны относительно систем S и S' можно записать

$$v_x = v'_x = c \quad (6.3)$$

Здесь $c = 3 \cdot 10^8$ м/с – скорость света в вакууме.

Относительность времени. Предположим, что в момент совпадения начал отсчета подвижной и неподвижной систем (см. рис. 6.1) в этой точке происходит вспышка света. Согласно принципу постоянства скорости света, свет будет распространяться с одинаковой скоростью c относительно обеих

систем отсчета. Координата фронта световой волны в неподвижной системе отсчета в момент времени t равна:

$$x = ct. \quad (6.4)$$

Координата фронта той же самой волны относительно движущейся системы отсчета выражается аналогичной формулой

$$x' = ct'. \quad (6.5)$$

Здесь t' – время, отсчитываемое по часам системы отсчета S' . Так как $x \neq x'$ (см. рис. 6.1), то и

$$t \neq t'. \quad (6.6)$$

Это означает, что время течет по-разному в разных системах отсчета.

Преобразования Лоренца. Относительность времени приводит к необходимости поиска преобразований, описывающих переход от неподвижной системы отсчета к системе, движущейся прямолинейно и равномерно, как преобразований не только координат, но и времени, т.е. преобразований, связывающих x, y, z, t и x', y', z', t' . Эти преобразования впервые были получены Лоренцем (1904) и имеют вид:

$$x = \frac{x' + Vt'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \quad y = y', \quad z = z', \quad t = \frac{t' + x'V/c^2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \quad (6.7)$$

Они линейны, обратимы, удовлетворяют принципу постоянства скорости света и в пределе при $V/c \rightarrow 0$ переходят в преобразования Галилея. Таким образом, преобразования Лоренца можно рассматривать как обобщение преобразований Галилея.

Принцип относительности Эйнштейна. К концу XIX века физикой было накоплено много экспериментальных фактов, свидетельствующих о том, что не только механические, но и все физические явления вообще протекают в системе отсчета, движущейся равномерно и прямолинейно,

так, как если бы эта система покоилась. Основываясь на этих данных, Эйнштейн сформулировал следующий принцип: “Никакими физическими опытами, проведенными внутри данной системы отсчета, нельзя установить, находится ли эта система в состоянии покоя или равномерно прямолинейно движется”. Принципу Эйнштейна можно придать математическую форму: уравнения, описывающие физические законы, должны быть инвариантны относительно преобразований Лоренца. Заметим, что уравнения электромагнитного поля (уравнения Максвелла) удовлетворяют этому принципу.

Релятивистское уравнение движения. Уравнение движения материальной точки также должно удовлетворять принципу относительности Эйнштейна. Для заряженной частицы в электромагнитном поле такое уравнение было получено Планком (1906) на основе второго закона Ньютона, принципа относительности и уравнений электромагнитного поля (уравнений Максвелла). Это уравнение имеет вид

$$\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{F}, \quad (6.8)$$

где $\mathbf{F}$ – сила, действующая на заряд в электромагнитном поле (сила Лоренца),

$$\mathbf{p} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad (6.9)$$

релятивистский импульс частицы, m – ее масса, $\mathbf{v}$ – скорость.

Законы сохранения импульса и энергии в теории относительности.

Если сумма внешних сил равна нулю, то релятивистский импульс и релятивистская энергия системы частиц сохраняются:

$$\mathbf{p} = \sum_i \frac{m_i \mathbf{v}_i}{\sqrt{1 - v_i^2/c^2}} = \text{const}, \quad (6.10)$$

$$E = \sum_i \frac{m_i c^2}{\sqrt{1 - v_i^2/c^2}} = \text{const}. \quad (6.11)$$

Суммирование производится по всем частицам системы. Заметим, что в теории относительности эти два закона не являются независимыми: закон сохранения энергии является следствием закона сохранения импульса и принципа относительности.

Энергия покоя. Из формулы для релятивистской энергии (6.11) видно, что покоящаяся частица массой m обладает энергией

$$E_0 = mc^2 \quad (6.12)$$

Эта энергия называется энергией покоя.

Примеры решения задач

Пример 6.1. Написать обратные преобразования Лоренца.

Решение. Примем за неподвижную систему отсчета систему S' , показанную на рис. 6.1. Тогда система S , показанная на том же рисунке, будет двигаться влево (т.е. против оси $O'X'$) со скоростью V . Делая замену V на $-V$ в формулах (6.7) и заменяя штрихованные величины на нештрихованные и наоборот, получим

$$x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \frac{t - xV/c^2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \quad (6.13)$$

Формулы (6.13) называются обратными преобразованиями Лоренца. Они позволяют вычислить координаты материальной точки M в системе отсчета S' в некоторый момент времени t' по часам этой системы, если известны координаты точки M в системе отсчета S в момент времени t . Заметим, что подстановка формул (6.13) в формулы (6.7) приводит к тождествам. Это означает, что преобразования Лоренца обратимы.

Пример 6.2. Собственными размерами тела называются его размеры в той системе отсчета, в которой оно покоится. Пусть стержень собственной длиной L' , расположенный параллельно оси OX , движется вдоль по этой оси

со скоростью V . Какова длина L движущегося стержня, измеренная в неподвижной системе отсчета?

Решение. Длина стержня равна разности координат его концов в соответствующей системе отсчета. В частности, собственная длина стержня

$$L' = x_2' - x_1' \quad (6.14)$$

Длина движущегося стержня

$$L = x_2 - x_1 \quad (6.15)$$

где $x_1 = x_1(t)$, $x_2 = x_2(t)$ – координаты концов стержня, измеренные в один и тот же момент времени в системе S . Зафиксируем момент времени t по часам этой системы. Из первой формулы (6.13) при $t = \text{const}$ получаем

$$x_1' = \frac{x_1 - Vt}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \quad x_2' = \frac{x_2 - Vt}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}. \quad (6.16)$$

Вычитая из второго уравнения (6.16) первое, и принимая во внимание формулы (6.14), (6.15), находим

$$L' = \frac{L}{\sqrt{1 - V^2/c^2}},$$

откуда

$$L = L' \sqrt{1 - V^2/c^2}. \quad (6.17)$$

Из формулы (6.17) видно, что $L < L'$, т.е. длина движущегося стержня меньше его собственной длины. Этот эффект называют сокращением длины движущегося стержня или лоренцевым сокращением.

Пример 6.3. Пусть имеются двое неподвижных часов, расположенных на

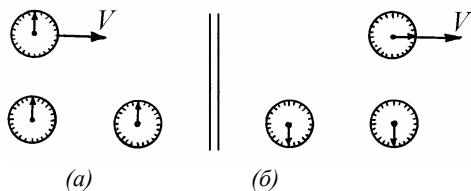


Рис. 6.2

оси OX неподвижной системы отсчета S на некотором расстоянии друг от друга, и часы, движущиеся вдоль оси OX со скоростью V . Пусть все трое часов начинают отсчет времени от момента, когда

подвижные часы проходят мимо левых неподвижных часов (рис. 6.2, а). Какое время t' покажут подвижные часы в момент прохождения ими правых неподвижных часов, если неподвижные часы показывают в этот момент время t ?

Решение. Пусть подвижные часы находятся в начале отсчета подвижной системы S' , показанной на рис. 6.1. Тогда координата этих часов в подвижной системе

$$x' = 0 \quad (6.18)$$

Подставив выражение (6.18) в первую формулу (6.13), получим

$$x = Vt. \quad (6.19)$$

Эта формула выражает координату подвижных часов в неподвижной системе отсчета S . Подставив выражение (6.19) в последнюю формулу (6.13), получим

$$t' = t\sqrt{1 - V^2 / c^2}. \quad (6.20)$$

Из формулы (6.20) видно, что $t' < t$. Это означает, что в движущейся системе отсчета время течет медленнее, чем в неподвижной системе (рис. 6.2, б). Этот эффект называют замедлением времени.

Пример 6.4. Вывести правила сложения скоростей в теории относительности.

Решение. Пусть некоторая материальная точка M произвольным образом движется относительно неподвижной S и подвижной S' систем отсчета, показанных на рис. 6.1. Декартовы проекции скорости точки на координатные оси указанных систем отсчета определяются формулами

$$v_x = \frac{dx}{dt}, v_y = \frac{dy}{dt}, v_z = \frac{dz}{dt} \quad (6.21)$$

и

$$v'_x = \frac{dx'}{dt'}, v'_y = \frac{dy'}{dt'}, v'_z = \frac{dz'}{dt'}. \quad (6.22)$$

Вычислим дифференциалы от величин x, y, z, t , определяемых формулами (6.7):

$$dx = \frac{dx' + V dt'}{\sqrt{1 - V^2 / c^2}}, dy = dy', dz = dz', dt = \frac{dt' + (V / c^2) dx'}{\sqrt{1 - V^2 / c^2}}. \quad (6.23)$$

Из формул (6.21) – (6.23) следует, что

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{dx' + V dt'}{dt' + (V / c^2) dx'} = \frac{v'_x + V}{1 + v'_x V / c^2}. \quad (6.24)$$

Аналогично

$$v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{dy' \sqrt{1 - V^2 / c^2}}{dt' + (V / c^2) dx'} = \frac{v'_y \sqrt{1 - V^2 / c^2}}{1 + v'_x V / c^2} \quad (6.25)$$

и

$$v_z = \frac{dz}{dt} = \frac{v'_z \sqrt{1 - V^2/c^2}}{1 + v'_x V/c^2}. \quad (6.26)$$

Формулы (6.24) – (6.26) позволяют найти декартовы проекции скорости частицы в неподвижной системе отсчета S , если известны декартовы проекции скорости частицы в подвижной системе S' и скорость движения подвижной системы. Как и преобразования Лоренца, правила сложения скоростей являются обратимыми. Например,

$$v'_x = \frac{v_x - V}{1 - v_x V/c^2}.$$

Положив $v'_x = c$, по формуле (6.24) получим $v_x = c$. Таким образом, полученные формулы удовлетворяют принципу постоянства скорости света. В пределе при $V/c \rightarrow 0$ релятивистские правила сложения скоростей переходят в классические правила сложения скоростей Галилея (6.2).

Пример 6.5. Преобразование ускорений. Пусть известны декартовы проекции скорости v'_x, v'_y, v'_z и ускорения a'_x, a'_y, a'_z материальной точки относительно подвижной системы отсчета S' , показанной на рис. 6.1, а также скорость движения этой системы V относительно неподвижной системы S . Найти декартовы проекции ускорения a_x, a_y, a_z материальной точки относительно неподвижной системы S .

Решение. Декартовы проекции ускорения материальной точки относительно систем S и S' определяются формулами

$$a_x = \frac{dv_x}{dt}, \quad a_y = \frac{dv_y}{dt}, \quad a_z = \frac{dv_z}{dt} \quad (6.27)$$

$$a'_x = \frac{dv'_x}{dt'}, \quad a'_y = \frac{dv'_y}{dt'}, \quad a'_z = \frac{dv'_z}{dt'}. \quad (6.28)$$

Возьмем дифференциал от правой и левой частей формулы (6.24). Получим

$$dv_x = \frac{(1 + v'_x V / c^2) dv'_x - (v'_x + V)(V / c^2) dv'_x}{(1 + v'_x V / c^2)^2} = \frac{(1 - V^2 / c^2) dv'_x}{(1 + v'_x V / c^2)^2}. \quad (6.29)$$

Используя формулы (6.29), (6.28) и четвертую формулу (6.23), находим

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{(1 - V^2 / c^2) dv'_x \sqrt{1 - V^2 / c^2}}{(1 + v'_x V / c^2)^2 (dt' + (V / c^2) dx')} = \frac{(1 - V^2 / c^2)^{3/2} a'_x}{(1 + v'_x V / c^2)^3}. \quad (6.30)$$

Аналогично получаем

$$dv_y = \sqrt{1 - V^2 / c^2} \cdot \frac{(1 + v'_x V / c^2) dv'_y - v'_y (V / c^2) dv'_x}{(1 + v'_x V / c^2)^2}$$

и

$$a_y = \frac{\left[(1 + v'_x V / c^2) a'_y - v'_y (V / c^2) a'_x \right] (1 - V^2 / c^2)}{(1 + v'_x V / c^2)^3}, \quad (6.31)$$

а также

$$a_z = \frac{\left[(1 + v'_x V / c^2) a'_z - v'_z (V / c^2) a'_x \right] (1 - V^2 / c^2)}{(1 + v'_x V / c^2)^3}. \quad (6.32)$$

Формулы обратного преобразования для компонент ускорения легко получить, заменив, как обычно, в формулах прямого преобразования V на $-V$ и штрихованные величины на нештрихованные и наоборот. Например,

$$a'_x = \frac{(1 - V^2 / c^2)^{3/2}}{(1 - v_x V / c^2)^3} a_x. \quad (6.33)$$

Пример 6.6. На частицу массой m действует сила $\mathbf{F}$. Найти ускорение частицы $\mathbf{a}$, если ее скорость $v = 0,8c$, а направление силы совпадает с направлением скорости.

Решение. Направим ось Ox вдоль векторов $\mathbf{F}$ и $\mathbf{v}$. Тогда $v = v_x = \dot{x}$, $v_y = v_z = 0$ и $F_x = F$, $F_y = F_z = 0$. Запишем релятивистское уравнение движения точки

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}} \right) = \mathbf{F}.$$

Проектируя это уравнение на ось x , получим

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{m\dot{x}}{\sqrt{1 - \dot{x}^2 / c^2}} \right) = F. \quad (6.34)$$

Выполняя дифференцирование в формуле (6.34), находим

$$\frac{m\ddot{x}}{\sqrt{1 - \dot{x}^2 / c^2}} + m\dot{x} \cdot \left(-\frac{1}{2} \right) \cdot \frac{1}{(1 - \dot{x}^2 / c^2)^{3/2}} \cdot \left(-\frac{1}{c^2} \right) \cdot 2\dot{x}\ddot{x} = F$$

или

$$\frac{m\ddot{x}}{(1 - \dot{x}^2 / c^2)^{3/2}} \left(1 - \frac{\dot{x}^2}{c^2} + \frac{\dot{x}^2}{c^2} \right) = F,$$

откуда

$$\ddot{x} = \frac{F}{m} \left(1 - \frac{\dot{x}^2}{c^2} \right)^{3/2}.$$

Таким образом, $a = \frac{F}{m} \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{3/2} \approx 0,18 \frac{F}{m}.$

Пример 6.7. Неупругий удар. Две частицы массой m каждая летят навстречу друг другу со скоростями v . В результате столкновения частицы слипаются. Найти массу M образовавшегося тела.

Решение. Так как сумма внешних сил равна нулю, сохраняются релятивистские импульс и энергия системы. Используя формулы (6.10), (6.11), получим уравнения

$$\frac{mv}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - \frac{mv}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \frac{MV}{\sqrt{1-V^2/c^2}} \quad (6.35)$$

и

$$\frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} + \frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \frac{Mc^2}{\sqrt{1-V^2/c^2}}. \quad (6.36)$$

Согласно уравнению (6.35) скорость образовавшегося тела равна нулю:

$V = 0$. Подставив $V = 0$ в уравнение (6.36), находим

$$M = \frac{2m}{\sqrt{1-v^2/c^2}}.$$

Заметим, что $M > 2m$, т.е. в данном процессе масса системы не сохраняется. Например, если $v = 0,6c$, то $M = 2,5m$.

Задание для самостоятельной работы

6.8. Две частицы движутся навстречу друг другу с одинаковыми по модулю скоростями v_0 . Найти модуль относительной скорости частиц v . Вычислить v для следующих значений v_0 : $v_0 = 0,1c$; $v_0 = 0,5c$; $v_0 = 0,9c$.

6.9. Две частицы движутся с одинаковыми по модулю скоростями v_0 во взаимно перпендикулярных направлениях. Найти модуль относительной скорости частиц v . Вычислить v для следующих значений v_0 : $v_0 = 0,1c$; $v_0 = 0,5c$; $v_0 = 0,9c$.

6.10. На частицу массой m действует сила F . Каково ускорение частицы a , если ее скорость $v = 0,8c$, а направление силы перпендикулярно направлению скорости?

6.11. На частицу, движущуюся со скоростью $v = 0,5c$, действует сила, направленная под углом $\alpha = 45^\circ$ к вектору скорости. Найти угол β между направлениями скорости и ускорения частицы.

6.12. Пусть в некоторой системе отсчета S декартовы проекции импульса и энергия частицы равны, соответственно, p_x, p_y, p_z и E . Каковы декартовы проекции импульса p'_x, p'_y, p'_z и энергия E' этой частицы в системе S' , движущейся относительно S как показано на рис. 6.1?

6.13. Найти соотношение между энергией E и импульсом p частицы, масса которой равна нулю. Какова скорость v такой частицы?

6.14. Пусть при скорости частицы v_0 ее импульс равен p_0 . Во сколько раз η нужно увеличить скорость частицы, чтобы ее импульс стал равным $2p_0$? Найти значение η для $v_0/c = 0,1; 0,5; 0,9$.

6.15. Частица, движущаяся со скоростью $v_1 = 0,8c$, налетает на покоящуюся частицу, имеющую такую же массу. В результате столкновения частицы слипаются. Определить скорость v образовавшегося тела.

§7. Неинерциальные системы отсчета

Краткие теоретические сведения

Лежащие в основе механики законы Ньютона (см. §4) справедливы только в инерциальных системах отсчета. Относительно всех инерциальных систем данное тело имеет одно и то же ускорение $\mathbf{a}$. Поскольку любая неинерциальная система отсчета движется относительно инерциальной с некоторым ускорением, ускорение тела в неинерциальной системе $\mathbf{a}'$ отличается от $\mathbf{a}$. Таким образом, переход в неинерциальную систему отсчета приводит к появлению у тела добавочного ускорения, причиной которого является не действие на него других тел, а движение самой системы отсчета. В то же время, необходимость такого перехода часто диктуется практическими потребностями решения задач механики в ускоренно движущихся системах отсчета.

Для того, чтобы можно было применять в неинерциальных системах уравнения динамики в обычной форме, вводят так называемые силы инерции, действие которых вызывает у тел добавочное ускорение. В соответствии с этим, уравнение движения материальной точки (второй закон Ньютона) в неинерциальной системе приобретает вид

$$m\mathbf{a}' = \mathbf{F} + \mathbf{F}_{\text{ин}} . \quad (7.1)$$

Здесь m – масса материальной точки, $\mathbf{a}'$ – ее ускорение относительно неинерциальной системы отсчета, $\mathbf{F}$ – сумма сил, действующих на материальную точку со стороны других тел, $\mathbf{F}_{\text{ин}}$ – сила инерции, определяемая формулой

$$\mathbf{F}_{\text{ин}} = -m(\mathbf{a} - \mathbf{a}') , \quad (7.2)$$

где $\mathbf{a} = \mathbf{F} / m$ – ускорение материальной точки в инерциальной системе отсчета.

Входящая в определение силы инерции величина $(\mathbf{a} - \mathbf{a}')$ представляет собой разность ускорений одной и той же точки относительно двух систем отсчета: неподвижной и движущейся. Нахождение этой разности является задачей кинематики относительного движения. Воспользовавшись формулами, приведенными в §3, получаем:

$$(\mathbf{a} - \mathbf{a}') = \mathbf{a}_\Pi + \mathbf{a}_\text{к}, \quad (7.3)$$

где $\mathbf{a}_\Pi$ – переносное ускорение, $\mathbf{a}_\text{к}$ – кориолисово ускорение. Следовательно, сила инерции может быть представлена в виде суммы двух слагаемых:

$$\mathbf{F}_\text{ин} = \mathbf{F}_\Pi + \mathbf{F}_\text{к}, \quad (7.4)$$

где

$$\mathbf{F}_\Pi = -m\mathbf{a}_\Pi \quad (7.5)$$

– переносная сила инерции,

$$\mathbf{F}_\text{к} = -m\mathbf{a}_\text{к} \quad (7.6)$$

– кориолисова сила инерции. Формулы, приведенные в §3, позволяют выразить эти силы через характеристики движения неинерциальной системы отсчета и кинематические характеристики движения точки относительно неинерциальной системы, а именно,

$$\mathbf{F}_\Pi = -m\mathbf{a}_0 + m\omega^2 \mathbf{r}'_\perp \quad (7.7)$$

и

$$\mathbf{F}_\text{к} = -2m[\boldsymbol{\omega}, \mathbf{v}']. \quad (7.8)$$

Здесь $\mathbf{a}_0$ – ускорение начала отсчета неинерциальной системы, $\boldsymbol{\omega}$ – угловая скорость вращения неинерциальной системы, $\mathbf{r}'_{\perp}$ – составляющая радиус-вектора материальной точки в неинерциальной системе отсчета, перпендикулярная оси вращения системы, $\mathbf{v}'$ – скорость материальной точки относительно неинерциальной системы.

Второе слагаемое в правой части формулы (7.7) носит название центробежной силы инерции:

$$\mathbf{F}_{\text{цб}} = m\boldsymbol{\omega}^2 \mathbf{r}'_{\perp}. \quad (7.9)$$

Центробежная сила направлена от оси вращения неинерциальной системы. Переносная сила инерции образует потенциальное силовое поле.

Заметим, что силы инерции отличаются от "обычных" сил (сил взаимодействия между телами) рядом особенностей. Во-первых силы инерции не инвариантны относительно перехода от одной неинерциальной системы отсчета к другой. Во-вторых, нельзя указать конкретные тела, со стороны которых действуют силы инерции. Иначе говоря, силы инерции не подчиняются третьему закону Ньютона. В остальном это обычные силы, которые способны вызывать ускорения тел, совершать работу, изменять энергию и импульс тел, деформировать тела и т.п. Использование сил инерции позволяет решать задачи механики непосредственно по отношению к ускоренно движущимся системам отсчета, что часто оказывается значительно проще, чем анализ движения в инерциальной системе.

Примеры решения задач

Пример 7.1. На резиновом жгуте подвешено тело массой m . Известно, что при увеличении длины жгута вдвое по сравнению с его собственной длиной l_0 на концах жгута возникает сила f_0 . Система вращается вокруг вертикальной оси так, что тело движется в горизонтальной плоскости по окружности с угловой скоростью ω . Найти длину шнура при движении тела и угол, на который отклонится шнур от вертикали.

Решение. Перейдем в неинерциальную систему отсчета, вращающуюся с угловой скоростью ω (рис. 7.1). В этой системе тело m находится в равновесии под действием трех сил:

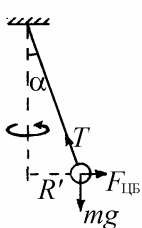


Рис. 7.1

$$mg + F_{\text{цб}} + T = 0. \quad (7.10)$$

Здесь через T обозначена сила натяжения шнура, $F_{\text{цб}} = m\omega^2 R'$ – центробежная сила инерции. Записывая соотношение (7.10) в проекциях на горизонтальную и вертикальную оси, имеем

$$m\omega^2 R' = T \sin \alpha, \quad (7.11)$$

$$mg = T \cos \alpha. \quad (7.12)$$

Согласно закону Гука, натяжение жгута

$$T = k(l - l_0),$$

где k – коэффициент жесткости, l – длина жгута в растянутом состоянии. По условию задачи $T = f_0$ при $l = 2l_0$. Отсюда $k = f_0 / l_0$ и

$$T = \frac{f_0}{l_0}(l - l_0). \quad (7.13)$$

Объединяя (7.11) – (7.13) и учитывая, что $R' = l \sin \alpha$, находим ответ:

$$\cos \alpha = g \frac{f_0 - m\omega^2 l_0}{\omega^2 l_0 f_0}, \quad (7.14)$$

$$l = l_0 \left(\frac{m\omega^2 l_0}{f_0 - m\omega^2 l_0} + 1 \right).$$

Пример 7.2. Небольшое тело поместили на вершину полусферы радиусом R . Затем полусфере сообщили постоянное ускорение $\mathbf{a}_0$ в горизонтальном направлении (рис. 7.2). Пренебрегая трением, найти угол ϑ_0 между вертикалью и радиус-вектором, проведенным из центра полусферы в точку, где происходит отрыв тела.

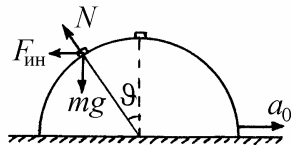


Рис. 7.2

Решение. Перейдем в неинерциальную систему отсчета, связанную с полусферой. В этой системе отсчета вплоть до момента отрыва от полусферы тело движется под действием трех сил:

$$m\ddot{\mathbf{r}} = m\mathbf{g} + \mathbf{N} + \mathbf{F}_{\text{ин}}, \quad (7.15)$$

где $\mathbf{N}$ – сила реакции со стороны полусферы. Поскольку траектория тела до точки отрыва представляет собой дугу окружности радиусом R ,

$$\ddot{\mathbf{r}}_n = -\mathbf{n} \frac{v^2}{R}, \quad (7.16)$$

где $\mathbf{n}$ – нормаль к поверхности сферы в точке нахождения тела. Для силы инерции имеем выражение

$$\mathbf{F}_{\text{ин}} = -m\mathbf{a}_0. \quad (7.17)$$

Проектируя (7.15) на направление нормали $\mathbf{n}$ и учитывая (7.16), (7.17), получаем

$$-\frac{mv^2}{R} = -mg \cos \vartheta + ma_0 \sin \vartheta + N. \quad (7.18)$$

В точке отрыва сила реакции N обращается в нуль. Из уравнения (7.18) находим

$$\frac{v_0^2}{R} = g \cos \vartheta_0 - a_0 \sin \vartheta_0. \quad (7.19)$$

Для того чтобы связать скорость тела с углом ϑ , воспользуемся законом изменения энергии тела в неинерциальной системе отсчета:

$$\frac{mv^2}{2} = mgR(1 - \cos \vartheta) + \Delta A, \quad (7.20)$$

где ΔA – работа силы инерции. Работа силы инерции на перемещении

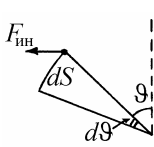


Рис. 7.3

$dS = R d\vartheta$ равна (см. рис. 7.3):

$$dA = F_{\text{ин}} dS \cos \vartheta = ma_0 R \cos \vartheta d\vartheta.$$

Отсюда

$$\Delta A = \int_0^{\vartheta} ma_0 R \cos \vartheta d\vartheta = ma_0 R \sin \vartheta. \quad (7.21)$$

Используя (7.20) и (7.21), находим

$$\frac{v^2}{2R} = g(1 - \cos \vartheta) + a_0 \sin \vartheta. \quad (7.22)$$

Это равенство справедливо и в точке отрыва. Используя формулы (7.19) и (7.22), получаем условие для угла ϑ в точке отрыва:

$$\cos \vartheta_0 - \alpha \sin \vartheta_0 - \frac{2}{3} = 0. \quad (7.23)$$

Здесь введено обозначение

$$\alpha = \frac{a_0}{g}. \quad (7.24)$$

Найдем решение уравнения (7.23). Для этого представим его в виде

$$\sqrt{1+\alpha^2} \left(\frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}} \cos \vartheta_0 - \frac{\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}} \sin \vartheta_0 \right) - \frac{2}{3} = 0$$

и введем угол φ такой, что

$$\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}}, \quad \sin \varphi = \frac{\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}}. \quad (7.25)$$

Тогда

$$\cos(\vartheta_0 + \varphi) = \frac{2}{3\sqrt{1+\alpha^2}}$$

и, следовательно,

$$\vartheta_0 = \arccos\left(\frac{2}{3\sqrt{1+\alpha^2}}\right) - \varphi.$$

С учетом формул (7.25) полученное решение можно представить в виде

$$\cos \vartheta_0 = \frac{2 + \alpha\sqrt{5+9\alpha^2}}{3(1+\alpha^2)}.$$

Пример 7.3. Какую форму следует придать куску проволоки, вращающемуся вокруг вертикальной оси с угловой скоростью ω , чтобы надетая на проволоку маленькая бусинка в любой точке проволоки могла находиться в равновесии? Трением бусинки о проволоку пренебречь.

Решение. Перейдем в неинерциальную систему отсчета, вращающуюся вместе с проволокой. Условие равновесия бусинки в некоторой точке проволоки имеет вид

$$mg + N + F_{\text{ин}} = 0. \quad (7.26)$$

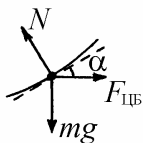


Рис. 7.4

Векторы сил показаны на рис. 7.4. Через α на этом рисунке обозначен угол между касательной к проволоке и горизонталью. Проектируя векторное равенство (7.26) на горизонтальную и вертикальную оси координат, получим уравнения

$$N \sin \alpha = m\omega^2 r, \quad N \cos \alpha = mg, \quad (7.27)$$

где r – расстояние от бусинки до оси вращения. Отсюда $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\omega^2 r}{g}$. С дру-

гой стороны, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{df}{dr}$, где $f = f(r)$ – искомая функция, описывающая форму проволоки. Для этой функции получаем дифференциальное уравнение

$$\frac{df}{dr} = \frac{\omega^2}{g} r.$$

Интегрирование этого уравнения с учетом граничного условия $f(0) = 0$ дает

$$f(r) = \frac{\omega^2}{2g} r^2,$$

т.е. проволока должна иметь форму отрезка параболы.

Пример 7.4. Горизонтально расположенный гладкий стержень вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг вертикальной оси. По стержню без трения скользит колечко массой m , движущееся от оси вращения с начальной скоростью v_0 . Найти силу N , с которой стержень действует на колечко в момент, когда оно находится на расстоянии l от оси вращения.

Решение. Рассмотрим движение колечка в неинерциальной системе отсчета, вращающейся вместе со стержнем (рис. 7.5). Сила тяжести, действующая на колечко, уравнивается вертикальной составляющей силы реакции стержня: $mg = N_z$. В горизонтальной плоскости уравнения движения колечка имеют вид

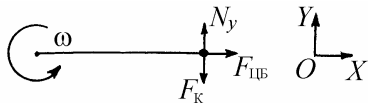


Рис. 7.5

$$m\ddot{x} = m\omega^2 x, \quad 0 = N_y - F_k, \quad (7.28)$$

где F_k – сила Кориолиса. Для того, чтобы проинтегрировать первое уравнение из системы (7.28), воспользуемся соотношением

$$\ddot{x} = \frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} = v \frac{dv}{dx}.$$

Имеем

$$v \frac{dv}{dx} = \omega^2 x, \quad v(0) = v_0.$$

Отсюда находим скорость колечка в момент, когда оно находится на расстоянии l от оси вращения:

$$v^2 = v_0^2 + \omega^2 l^2.$$

Из второго уравнения системы (7.28) определяем

$$N_y = F_k = 2m\omega v.$$

Окончательно

$$N = \sqrt{N_y^2 + N_z^2} = m\sqrt{g^2 + 4\omega^2(\omega^2 l^2 + v_0^2)}.$$

Пример 7.5. С высоты h , много меньшей радиуса Земли, без начальной скорости падает тело. Определить смещение точки падения тела на Землю по отношению к отвесу, вызванное суточным вращением Земли. Сопротивление воздуха не учитывать. Географическая широта места φ . Угловая скорость вращения Земли Ω .

Решение. Выберем неинерциальную систему отсчета, жестко связанную с вращающейся Землей (рис. 7.6). Ось $O'X'$ направим вдоль параллели с запада на восток, ось $O'Z'$ – вверх от поверхности Земли через точку начала падения тела параллельно отвесу. Линия отвеса определяется направлением ускорения свободного падения тела, имеющего нулевую скорость относительно поверхности Земли:

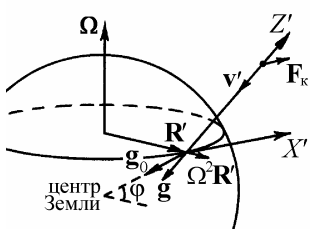


Рис. 7.6

$$\mathbf{g} = \mathbf{g}_0 + \Omega^2 \mathbf{R}',$$

где $\mathbf{g}_0$ – ускорение, вызванное притяжением тела к Земле, $\Omega^2 \mathbf{R}'$ – ускорение, обусловленное центробежной силой инерции. Уравнение движения тела в неинерциальной системе отсчета имеет вид

$$m\ddot{\mathbf{r}}' = m\mathbf{g} + \mathbf{F}_k = m\mathbf{g} + 2m[\mathbf{v}', \boldsymbol{\Omega}], \quad (7.29)$$

где $\mathbf{v}'$ – скорость тела. Из-за малости величины Ω сила Кориолиса оказывается значительно меньше силы притяжения Земли, поэтому в первом приближении можно считать, что направление скорости тела при падении почти не отличается от отвесного. Следовательно, сила Кориолиса $\mathbf{F}_k = 2m[\mathbf{v}', \boldsymbol{\Omega}]$ действует в плоскости $X'O'Z'$, причем при движении тела вниз направлена на восток. Проектируя уравнение (7.29) на декартовы оси, получаем

$$m\ddot{x}' = -2m\dot{z}'\Omega\cos\varphi, \quad \ddot{z}' = -g.$$

Интегрируя эти уравнения с начальными условиями

$$\dot{x}'(0) = 0, \quad \dot{z}'(0) = 0, \quad x'(0) = 0, \quad z'(0) = h,$$

находим

$$\dot{z}' = -gt, \quad z' = h - \frac{gt^2}{2}, \quad \ddot{x}' = 2gt\Omega\cos\varphi, \quad x' = \frac{gt^3\Omega\cos\varphi}{3}.$$

За время падения $t_0 = \sqrt{\frac{2h}{g}}$ тело сместится на восток на расстояние

$$x'_0 = \frac{2\sqrt{2}\Omega\cos\varphi}{3\sqrt{g}}h^{3/2}.$$

Задание для самостоятельной работы

7.6. Тонкий стержень, расположенный горизонтально, перемещается в горизонтальной плоскости с ускорением a_0 , направленным под углом α к стержню. По стержню скользит бусинка массой m , причем коэффициент трения между нею и стержнем равен μ . Найти ускорение a бусинки относительно стержня.

- 7.7. По горизонтальной плоскости с заданным ускорением a_0 , направленным вправо, перемещается брусок A (рис. 7.7). Найти ускорение тел 1 и 2 относительно бруска. Массы тел одинаковы, коэффициент трения между бруском и обоими телами равен μ . Массы блока и нитей пренебрежимо малы, трения в блоке нет.

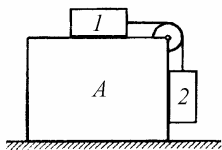


Рис. 7.7

- 7.8. Поезд движется с постоянным ускорением a на прямолинейном горизонтальном участке пути. В одном из вагонов к потолку подвешен на нити длиной l маленький шарик. Шарик отклоняют от положения равновесия и отпускают. Найти период колебаний шарика T .

- 7.9. На широте $\varphi = 60^\circ$ произвели выстрел из винтовки, расположенной в плоскости меридиана и направленной горизонтально на север. Пренебрегая сопротивлением воздуха, найти, в какую сторону и насколько отклонится пуля от плоскости меридиана за время $\tau = 1$ с после начала ее полета. Угловая скорость вращения Земли $\Omega = 7,28 \cdot 10^{-5}$ рад/с. Начальная скорость пули $v_0 = 500$ м/с.

- 7.10. Угловая скорость вращения плоскости колебаний маятника Фуко, установленного в Санкт-Петербурге (географическая широта $\varphi_1 = 59^\circ 52'$), составляет $\omega_1 = 6,30 \cdot 10^{-5}$ рад/с. С какой угловой скоростью ω_2 будет вращаться плоскость колебаний маятника Фуко, если установить его в Сочи (географическая широта $\varphi_2 = 43^\circ 38'$)?

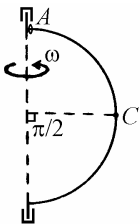


Рис. 7.8

- 7.11. Проволочное полукольцо радиусом R вращается вокруг вертикальной оси с угловой скоростью ω (рис. 7.8). Вблизи верхнего подшипника (точка A) находится бусинка, нанизанная на проволоку. Найти скорость бусинки относительно полукольца в точке C , если в точке A ее скорость равнялась нулю. Трением пренебречь.

7.12. Невесомая жесткая спица с закрепленными на ней двумя одинаковыми маленькими шариками вращается вокруг вертикальной оси, проходящей через ее верхний конец, с угловой скоростью ω (рис. 7.9). Найти угол φ , на который спица отклоняется от вертикали.

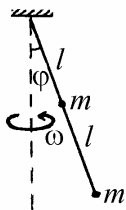


Рис. 7.9

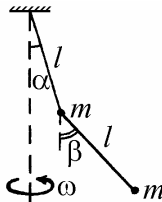


Рис. 7.10

7.13. Двойной математический маятник, представляющий собой два одинаковые маленькие шарика, подвешенные на нитях одинаковой длины (рис. 7.10), вращается вокруг вертикальной оси с угловой скоростью ω . На какой угол β от вертикали отклонится нижний маятник, если верхний отклонен от вертикали на угол α ?

7.14. На карусели установлена зажженная свеча под стеклянным колпаком. Когда карусель раскручивают, пламя свечи начинает наклоняться в сторону оси вращения карусели. Объясните этот эффект. На какой угол α от вертикали отклонится пламя, если расстояние от свечи до оси карусели R , а угловая скорость вращения ω ?

7.15. Из тонкого резинового жгута массой m с коэффициентом упругости k изготовили кольцо радиусом r . Кольцо раскрутили вокруг его оси с угловой скоростью ω . Какой радиус R будет иметь вращающееся кольцо?

§8. Момент инерции твердого тела

Краткие теоретические сведения

Основной величиной, характеризующей меру инертности твердого тела при его вращении, является момент инерции. Для твердого тела, представляющего собой дискретную систему материальных точек, момент инерции относительно оси вращения рассчитывается по формуле

$$I = \sum_i m_i r_{i\perp}^2, \quad (8.1)$$

где m_i - масса i -той точки, $r_{i\perp}$ - расстояние от этой точки до оси вращения (рис. 8.1). Если твердое тело можно рассматривать как сплошное, то сумма в формуле (8.1) заменяется интегралом по объему тела V :

$$I = \int_V \rho r_{\perp}^2 dV, \quad (8.2)$$

где dV - элемент объема, ρ - плотность материала, $r_{\perp}$ - расстояние от данного элемента тела до оси вращения.

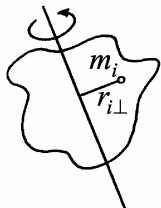


Рис. 8.1
К вычислению
момента инерции

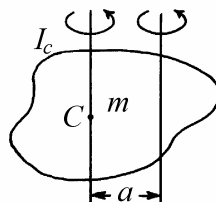


Рис. 8.2
К теореме Гюйгенса-Штейнера

Для разных осей вращения моменты инерции одного и того же тела различны. Согласно теореме Гюйгенса-Штейнера, момент инерции тела I относительно произвольной оси равен моменту инерции тела I_c относительно оси, проходящей через центр масс тела и параллельной данной, сложенному с произведением полной массы тела m на квадрат расстояния a между осями (рис. 8.2):

$$I = I_c + ma^2. \quad (8.3)$$

Для твердого тела, которое можно представить как систему материальных точек, радиус-вектор центра масс рассчитывается по формуле (5.3). Для сплошного тела положение центра масс определяется по формуле

$$\mathbf{r}_c = \frac{1}{m} \int_V \rho \mathbf{r} dV, \quad (8.4)$$

где $\mathbf{r}$ – радиус-вектор элемента объема тела dV . Как и в (8.2) интегрирование проводится по объему тела V .

Вычисление моментов инерции можно во многих случаях упростить, используя соображения симметрии, теорему Гюйгенса-Штейнера и следующие полезные соотношения. Пусть OX , OY и OZ – оси декартовой системы координат, связанные с твердым телом, а I_x , I_y и I_z – моменты инерции тела относительно этих осей. Нетрудно показать, что

$$I_x + I_y + I_z = 2 \int_V \rho r^2 dV, \quad (8.5)$$

где $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ – расстояние от элемента тела до начала координат.

Если повернуть координатные оси OX , OY и OZ относительно тела, оставляя углы между ними прямыми, то моменты инерции I_x , I_y и I_z , вообще говоря изменятся. Однако, как видно из (8.5), их сумма останется той же самой, так как стоящая в правой части (8.5) величина не зависит от ориента-

ции координатных осей. Таким образом, сумма моментов инерции I_x , I_y и I_z относительно любых трех взаимно перпендикулярных осей, проходящих через одну точку, зависит только от положения этой точки и не меняется с изменением ориентации осей.

Для тонкой плоской пластинки произвольной формы из (8.5) вытекает еще одно полезное следствие. Если совместить координатную плоскость XOY с плоскостью пластинки, то z -координаты всех элементов пластинки будут равны нулю. Поэтому стоящий в правой части (8.5) интеграл преобразуется в момент инерции пластинки I_z относительно оси OZ . Таким образом, в случае плоского распределения масс справедливо соотношение $I_x + I_y + I_z = 2I_z$, или

$$I_x + I_y = I_z. \quad (8.6)$$

Примеры решения задач

Пример 8.1. Вычислить момент инерции однородного стержня массой m и длиной l относительно оси, проходящей через центр масс перпендикулярно стержню.

Решение. Направим ось OX вдоль стержня, и поместим начало отсчета координаты в центр масс стержня (рис. 8.3). Тогда

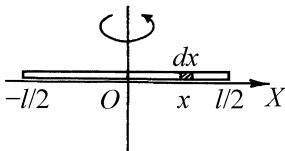


Рис. 8.3

ось вращения совпадает с осью OY . Выделим элемент стержня длиной dx , находящийся на расстоянии x от оси вращения. Момент инерции данного элемента стержня равен

$$dI_c = dm \cdot x^2 = \frac{m}{l} dx \cdot x^2.$$

Интегрируя по длине стержня, получаем

$$I_c = \frac{m}{l} \int_{-l/2}^{l/2} x^2 dx = \frac{ml^2}{12}.$$

Применяя теорему Гюйгенса – Штейнера, находим момент инерции стержня относительно оси, проходящей через его конец:

$$I = \frac{ml^2}{12} + m\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{ml^2}{3}.$$

Пример 8.2. Вычислить момент инерции тонкого однородного диска массой m и радиусом R относительно оси, а) проходящей через центр масс перпендикулярно плоскости диска и б) совпадающей с диаметром диска.

Решение. Введем полярные координаты r и φ , поместив начало координат в центр диска (рис. 8.4). Элемент площади в полярных координатах равен

$$dS = r dr d\varphi,$$

а масса элемента диска с такой площадью

$$dm = \frac{m}{\pi R^2} r dr d\varphi.$$

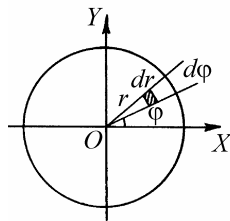


Рис. 8.4

а) Учитывая, что расстояние от элемента диска до оси вращения равно r , получаем элементарный момент инерции относительно оси OZ , перпендикулярной диску,

$$dI_z = dm \cdot r^2 = \frac{m}{\pi R^2} r^3 dr d\varphi.$$

Интегрируя это выражение, находим

$$I_z = \frac{m}{\pi R^2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R r^3 dr = \frac{mR^2}{2}.$$

Заметим, что такой же момент инерции имеет однородный цилиндр массой m и радиусом R относительно продольной оси.

б) Отличие от предыдущего случая заключается в том, что расстояние от элемента диска до оси вращения (оси OY) теперь равно $x = r \cos \varphi$. Учитывая это, находим элементарный момент инерции

$$dI_y = dm \cdot x^2 = \frac{m}{\pi R^2} r^3 \cos^2 \varphi \cdot dr d\varphi.$$

Окончательно

$$I_y = \frac{m}{\pi R^2} \int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi \cdot d\varphi \int_0^R r^3 dr = \frac{mR^2}{4}.$$

Пример 8.3. Вычислить момент инерции однородного кругового цилиндра массой m , радиусом R и длиной L относительно оси, перпендикулярной оси цилиндра и проходящей через его центр масс.

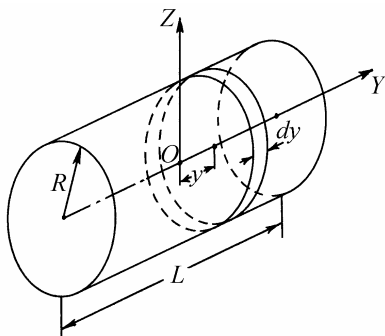


Рис. 8.5

Решение. Выберем систему координат как показано на рис. 8.5, поместив начало координат в центр масс цилиндра. Для вычисления момента инерции разобьем цилиндр на тонкие диски. Элементарный момент инерции диска толщиной dy , находящегося на расстоянии y от оси вращения, согласно теореме Гюйгенса-Штейнера равен

$$dI = dI_c + dm \cdot y^2 = \frac{R^2}{4} \cdot \frac{m}{L} dy + \frac{m}{L} y^2 dy.$$

Интегрируя это выражение по длине цилиндра, находим:

$$I = \frac{m}{L} \int_{-L/2}^{L/2} \left(\frac{1}{4} R^2 + y^2 \right) dy = \frac{mR^2}{4} + \frac{mL^2}{12}.$$

Пример 8.4. Вычислить момент инерции однородного сплошного шара массой m и радиусом R относительно оси, проходящей через центр шара.

Решение. Введем сферическую систему координат r, ϑ, φ , поместив начало отсчета в центр шара (рис. 8.6). Элемент объема в сферических координатах равен

$$dV = r^2 \sin \vartheta \, dr \, d\varphi \, d\vartheta.$$

Расстояние от этого элемента до оси вращения (оси OZ) равно $r \sin \vartheta$. Масса выделенного элемента шара

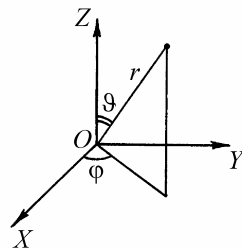


Рис. 8.6

$$dm = \rho dV,$$

Плотность шара ρ можно вычислить, поделив массу шара на его объем, равный $\frac{4}{3}\pi R^3$. Получим

$$\rho = \frac{3m}{4\pi R^3}.$$

Элементарный момент инерции:

$$dI = dm \cdot (r \sin \vartheta)^2 = \rho r^4 \sin^3 \vartheta \, dr \, d\varphi \, d\vartheta.$$

Интегрированием этого выражения по объему шара находим его момент инерции:

$$I = \rho \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin^3 \vartheta d\vartheta \int_0^R r^4 dr = \frac{2}{5} m R^2.$$

Пример 8.5. Определить положение центра масс сплошного однородного конуса высотой H .

Решение. Выберем систему координат, изображенную на рис. 8.7. Учитывая осевую симметрию рассматриваемого тела, разобьем конус на тонкие диски массой $dm = \rho dV = \rho \pi r^2 dz$. Здесь $r = R \left(1 - \frac{z}{H}\right)$ – радиус диска, ρ – плотность, R – радиус основания конуса. В выбранной системе координата центра масс конуса выразится следующим образом:

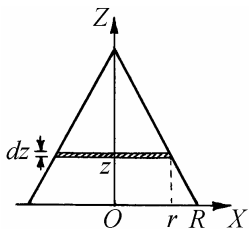


Рис. 8.7

$$z_c = \frac{\rho \pi R^2}{m} \int_0^H \left(1 - \frac{z}{H}\right)^2 z dz = \frac{1}{12m} \rho \pi R^2 H^2.$$

где m – масса конуса, равная

$$m = \rho \pi R^2 \int_0^H \left(1 - \frac{z}{H}\right)^2 dz = \frac{1}{3} \rho \pi R^2 H.$$

Окончательно

$$z_c = \frac{H}{4}.$$

Центр масс однородного сплошного конуса находится на его оси на расстоянии $H/4$ от основания.

Задание для самостоятельной работы

8.6. Вычислить момент инерции тонкой прямоугольной пластинки массой m со сторонами a и b относительно оси, перпендикулярной пластинке и проходящей через ее центр.

8.7. Найти момент инерции тонкого однородного стержня массой m и длиной l относительно оси, проходящей через середину стержня и составляющей с ним угол α .

8.8. Вычислить момент инерции кольца массой m с внутренним радиусом r и внешним радиусом R относительно оси, перпендикулярной плоскости кольца и проходящей через его центр.

8.9. Вычислить момент инерции однородной тонкой пластинки массой m , имеющей форму эллипса с полуосями a и b , относительно оси, перпендикулярной пластинке и проходящей через центр эллипса.

8.10. Вычислить момент инерции однородной тонкой пластинки массой m , имеющей форму прямоугольного треугольника с острым углом α и прилежащим ему катетом b (рис. 8.8), относительно оси, перпендикулярной пластинке и проходящей через вершину острого угла.

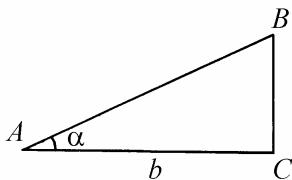


Рис. 8.8

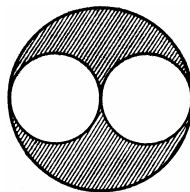


Рис. 8.9

8.11. Найти момент инерции круглого диска радиусом R с двумя вырезами в виде кругов радиусами $R/2$ (рис. 8.9) относительно оси, перпендикулярной плоскости диска и проходящей через центр. Толщина диска b , плотность ρ .

8.12. Вычислить момент инерции прямого кругового конуса массой m с радиусом основания R относительно оси симметрии.

8.13. Найти момент инерции кругового конуса массой m , высотой H с радиусом основания R относительно оси, проходящей через вершину конуса и перпендикулярной его оси симметрии.

8.14. Вычислить момент инерции тонкой сферы массой m и радиусом R относительно оси, проходящей через центр сферы.

8.15. Найти положение центра масс сплошного однородного тела, представляющего собой половину шара радиусом R .

§9. Динамика твердого тела

Краткие теоретические сведения

В задачах динамики твердого тела различают следующие виды движения (см. §2): поступательное движение, вращение вокруг неподвижной оси, плоское движение, движение тела с одной неподвижной точкой.

Согласно теореме о движении центра масс (см §5), при любом типе движения тела справедливо уравнение

$$m\mathbf{a}_c = \mathbf{F}, \quad (9.1)$$

где m – масса тела, $\mathbf{a}_c$ – ускорение центра масс, $\mathbf{F}$ – сумма внешних сил, действующих на тело. Центр масс тела движется так, как будто в этой точке сосредоточена масса всего тела и к ней приложены все внешние силы.

При поступательном движении тела перемещения, скорости и ускорения всех его точек одинаковы, поэтому уравнение (9.1) полностью описывает такое движение.

Уравнение вращения тела вокруг неподвижной оси имеет вид:

$$I\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{M}_{||}, \quad (9.2)$$

где I – момент инерции тела относительно оси, $\boldsymbol{\varepsilon}$ – вектор углового ускорения тела, $\mathbf{M}_{||}$ – составляющая суммы моментов внешних сил, параллельная оси вращения. Для силы $\mathbf{F}$, точка приложения которой описывается радиус-вектором $\mathbf{r}$ с началом на оси вращения, $\mathbf{M}_{||}$ вычисляется по формуле

$$\mathbf{M}_{||} = [\mathbf{r}_{\perp}, \mathbf{F}_{\perp}], \quad (9.3)$$

где $\mathbf{r}_\perp$ и $\mathbf{F}_\perp$ – составляющие радиус-вектора $\mathbf{r}$ и силы $\mathbf{F}$ в плоскости, перпендикулярной оси. Процедура нахождения векторной величины $\mathbf{M}_\parallel$ проиллюстрирована на рис. 9.1.

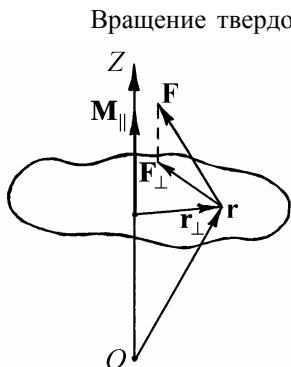


Рис. 9.1. К вычислению момента силы

Вращение твердого тела, совершающего плоское движение, удобнее всего описывать в поступательно движущейся системе отсчета, связанной с центром масс тела. В этой системе уравнение вращения тела совпадает по форме с (9.2). Под I в данном случае следует понимать момент инерции тела I_c относительно оси, перпендикулярной плоскости движения тела и проходящей через центр масс, под $\mathbf{M}_\parallel$ –составляющую момента внешних сил вдоль этой же оси.

В некоторых задачах возникает необходимость вычислить кинетическую энергию твердого тела, совершающего плоское движение. Для этого можно воспользоваться теоремой Кенига, согласно которой

$$K = \frac{mv_c^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2}. \quad (9.4)$$

Рассмотрим теперь движение тела с одной неподвижной точкой. Для анализа такого движения поместим начало неподвижной (лабораторной) системы координат в неподвижную точку тела и вычислим относительно нее момент импульса тела

$$\mathbf{N} = \sum_i [\mathbf{r}_i, m_i \mathbf{v}_i], \quad (9.5)$$

и момент внешних сил

$$\mathbf{M} = \sum_i [\mathbf{r}_i, \mathbf{F}_i]. \quad (9.6)$$

Здесь m_i – масса, $\mathbf{r}_i$ – радиус-вектор, $\mathbf{v}_i$ – скорость i -й точки тела в лабораторной системе отсчета, $\mathbf{F}_i$ – сумма внешних сил, действующих на эту точку. Суммирование в (9.5) и (9.6) проводится по всем точкам тела.

Запишем уравнение моментов относительно неподвижной точки:

$$\frac{d\mathbf{N}}{dt} = \mathbf{M}. \quad (9.7)$$

Согласно теореме Эйлера (2.3) скорость i -й точки тела в лабораторной системе отсчета выражается через радиус-вектор этой точки $\mathbf{r}_i$ и вектор мгновенной угловой скорости тела $\boldsymbol{\omega}$ следующим образом:

$$\mathbf{v}_i = [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}_i]. \quad (9.8)$$

Введем сопровождающую систему координат x, y, z , жестко связанную с телом. Эта система вращается относительно лабораторной системы с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$. Обозначим через $d'\mathbf{N}$ приращение вектора $\mathbf{N}$ за время dt относительно сопровождающей системы отсчета. Тогда

$$d\mathbf{N} = d'\mathbf{N} + [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{N}]dt. \quad (9.9)$$

Заметим, что если вектор $\mathbf{N}$ жестко связан с сопровождающей системой координат ($d'\mathbf{N} = 0$), то за время dt он приобретает в лабораторной системе приращение

$$d\mathbf{N} = [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{N}]dt. \quad (9.10)$$

Важно отметить, что формула типа (9.10) справедлива вообще для любого вектора, жестко связанного с сопровождающей системой, в том числе для ортов этой системы.

Из (9.7) и (9.9) следует, что

$$\frac{d'\mathbf{N}}{dt} + [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{N}] = \mathbf{M}. \quad (9.11)$$

Согласно формулам (9.5) и (9.8) проекции вектора момента импульса тела N_x, N_y, N_z на оси сопровождающей системы координат выражаются через проекции вектора мгновенной угловой скорости тела $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ на оси той же системы следующим образом:

$$N_x = I_{xx}\omega_x + I_{xy}\omega_y + I_{xz}\omega_z,$$

$$N_y = I_{yx}\omega_x + I_{yy}\omega_y + I_{yz}\omega_z,$$

$$N_z = I_{zx}\omega_x + I_{zy}\omega_y + I_{zz}\omega_z.$$

Величины I_{ij} ($i, j = x, y, z$) образуют тензор инерции твердого тела и определяются формулами

$$I_{xx} = \sum_i m_i (y_i^2 + z_i^2), \quad I_{yy} = \sum_i m_i (x_i^2 + z_i^2), \quad I_{zz} = \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2),$$

$$I_{xy} = I_{yx} = -\sum_i m_i x_i y_i, \quad I_{xz} = I_{zx} = -\sum_i m_i x_i z_i, \quad I_{yz} = I_{zy} = -\sum_i m_i y_i z_i.$$

Здесь x_i, y_i, z_i – декартовы координаты материальной точки тела массой m_i в сопровождающей системе координат.

Тензор инерции не зависит от движения тела, а определяется формой и размерами тела, а также распределением массы внутри тела. Кроме того, тензор инерции зависит от того, какова ориентация осей сопровождающей системы координат относительно тела. Можно показать, что в общем случае оси сопровождающей системы координат могут быть выбраны так, что тензор инерции будет диагональным. Такие оси называются глав-

ными осями инерции тела. Связь декартовых компонент момента импульса и угловой скорости вращения тела в главных осях имеет вид

$$N_x = I_x \omega_x, \quad N_y = I_y \omega_y, \quad N_z = I_z \omega_z. \quad (9.12)$$

Величины I_x, I_y, I_z называются главными моментами инерции тела.

Формулы (9.12) показывают, что векторы момента импульса и угловой скорости вращения тела, вообще говоря, не параллельны друг другу. Однако если тело вращается вокруг одной из главных осей инерции, то вектор $\mathbf{N}$ становится параллельным вектору $\boldsymbol{\omega}$. Именно это обстоятельство физически выделяет главные оси инерции среди всех возможных направлений в твердом теле.

Подставив выражения (9.12) в формулу (9.11), получим уравнения движения тела с одной неподвижной точкой (уравнения Эйлера)

$$\begin{aligned} I_x \frac{d'\omega_x}{dt} + (I_z - I_y) \omega_y \omega_z &= M_x, \\ I_y \frac{d'\omega_y}{dt} + (I_x - I_z) \omega_x \omega_z &= M_y, \\ I_z \frac{d'\omega_z}{dt} + (I_y - I_x) \omega_x \omega_y &= M_z. \end{aligned} \quad (9.13)$$

Здесь M_x, M_y, M_z – моменты внешних сил относительно главных осей инерции тела. Решив уравнения Эйлера с учетом соответствующих начальных условий, можно найти функции $\omega_x(t), \omega_y(t), \omega_z(t)$, а затем, используя соотношения (9.12), функции $N_x(t), N_y(t), N_z(t)$.

Ориентация главных осей инерции тела относительно лабораторной системы координат характеризуется матрицей поворота (см. §2). Зная решение уравнений Эйлера и матрицу поворота, нетрудно найти декартовы компоненты мгновенной угловой скорости вращения тела относительно лабораторной системы координат. Далее по формулам типа (9.10) можно вычислить производные по времени ортов сопровождающей системы коор-

динат (направленных вдоль главных осей инерции тела) и получить в итоге дифференциальные уравнения для элементов матрицы поворота, решение которых с учетом соответствующих начальных условий дает закон движения тела с одной неподвижной точкой.

Примеры решения задач

Пример 9.1. Диск радиусом R с моментом инерции I скатывается по наклонной плоскости, образующей с горизонталью угол α . Считая, что движение диска является плоским и качение происходит без проскальзывания, найти ускорение центра диска. Определить минимальное значение коэффициента трения, при котором отсутствует проскальзывание.

Решение. Движение диска происходит под действием трех сил: силы тяжести mg , силы нормального давления Q и силы трения F (рис. 9.2). Уравнение движения центра масс диска имеет вид

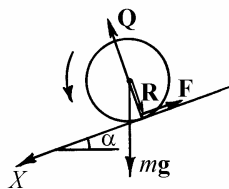


Рис. 9.2

$$ma_c = mg + Q + F.$$

Записывая это уравнение в проекции на ось OX , параллельную наклонной плоскости, имеем

$$ma_c = mg \sin \alpha - F.$$

Уравнение вращения диска вокруг оси, перпендикулярной плоскости рисунка и проходящей через центр масс диска, имеет вид

$$I\epsilon = [R, F],$$

где R – радиус-вектор, проведенный из центра масс в точку приложения силы F , т.е. в точку касания диска и наклонной плоскости. Сила тяжести и сила нормального давления имеют относительно центра масс нулевые мо-

менты. Поскольку $\mathbf{R} \perp \mathbf{F}$ и векторное произведение $[\mathbf{R}, \mathbf{F}]$ направлено на нас, проекция векторного уравнения вращения диска на ось, перпендикулярную плоскости рисунка, имеет вид

$$I\varepsilon = FR.$$

Положительное направление вращения указано на рис. 9.2 стрелкой.

При отсутствии проскальзывания между угловым ε и линейным a_c ускорениями существует простая связь:

$$a_c = \varepsilon R.$$

Объединяя уравнения записанные соотношения, находим ускорение центра масс диска

$$a_c = \frac{g \sin \alpha}{1 + I / (mR^2)}$$

и силу трения между диском и наклонной плоскостью

$$F = \frac{I \sin \alpha}{R^2 [1 + I / (mR^2)]} g.$$

Поскольку максимально возможное значение силы трения покоя связано с коэффициентом трения μ соотношением

$$F_{\max} = \mu N = \mu mg \cos \alpha,$$

проскальзывания не будет, если $F \leq F_{\max}$, или

$$\frac{I \sin \alpha}{R^2 [1 + I / (mR^2)]} g \leq \mu mg \cos \alpha.$$

Отсюда находим условие, накладываемое на коэффициент трения: $\mu \geq \mu_{\min}$, где

$$\mu_{\min} = \frac{I}{mR^2 + I} \operatorname{tg} \alpha.$$

В частности, если диск является однородным, то $I = mR^2 / 2$ и

$$\mu_{\min} = \frac{1}{3} \operatorname{tg} \alpha.$$

Пример 9.2. Маятник Максвелла представляет собой массивный сплошной

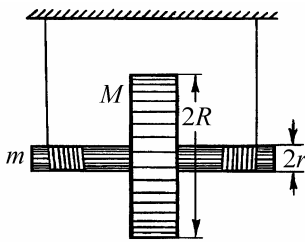
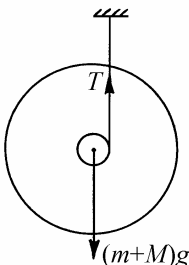


Рис. 9.3

диск с отверстием в центре, жестко насаженный на ось. Чтобы привести маятник в действие, на концах оси закрепляют две нити, которые наматывают на нее в одном направлении, а свободные концы нитей привязывают к неподвижной опоре (рис. 9.3). Будучи предоставленным самому себе, маятник совершает периодическое движение, опускаясь вниз и поднимаясь вверх.

Найти ускорение маятника и натяжение нитей, если радиус диска R , его масса M , радиус оси r , а ее масса m .

Решение. Маятник движется под действием сил, изображенных на рис. 9.4,



где через T обозначено суммарное натяжение обеих нитей. Уравнение движения центра масс маятника и уравнение вращения его вокруг оси, проходящей через центр масс, имеют вид:

$$(M + m)a = (M + m)g - T,$$

Рис. 9.4

$$I\varepsilon = Tr.$$

Угловое ускорение маятника ε связано с ускорением его центра масс a соотношением

$$\varepsilon = \frac{a}{r}.$$

Объединяя записанные выражения, находим

$$a = \frac{(M + m)g}{M + m + I/r^2}, \quad T = \frac{I(M + m)g}{(M + m + I/r^2)r^2}.$$

Момент инерции маятника равен

$$I = \frac{1}{2}(M(R^2 + r^2) + mr^2).$$

Окончательно,

$$a = \frac{2(M + m)gr^2}{3(M + m)r^2 + MR^2}, \quad T = \frac{(M + m)((M + m)r^2 + MR^2)g}{3(M + m)r^2 + MR^2}.$$

Рассмотрим движение маятника более подробно. Будучи предоставленным самому себе, он начинает опускаться вниз с ускорением a и раскручиваться с угловым ускорением ε . Нити во время движения вниз разматываются до полной длины. Раскрутившийся до определенной угловой скорости диск продолжает вращательное движение в том же направлении и наматывает нити на ось. Вследствие этого он поднимается вверх, замедляя при этом свое вращение. Дойдя до верхней точки, маятник опять опускается вниз и т.д. Таким образом, движения маятника являются периодическими, чем и объясняется его название.

Отметим, что ускорение маятника и сила натяжения нитей не зависят от того, куда движется маятник: вверх или вниз. При колебаниях маятника его скорость меняет направление, а ускорение центра масс все время направлено вниз. Сила натяжения нитей постоянна за исключением момента перемены направления движения маятника в нижней точке, когда натяжение нитей на короткое время резко возрастает.

Пример 9.3. С каким ускорением будет опускаться катушка массой M с моментом инерции I , если к нити, намотанной на катушку, подвешен груз массой m (рис. 9.5)?

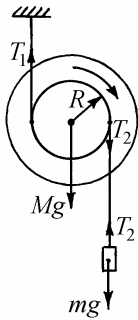


Рис. 9.5

Решение. Обозначим через T_1 и T_2 натяжения верхней и нижней нитей, a_c и a – ускорения центра масс катушки и груза, ε – угловое ускорение катушки. Положительное направление ε , соответствующее положительному направлению a_c , указано стрелкой. Движение системы описывается следующей системой уравнений:

$$Ma_c = Mg + T_2 - T_1,$$

$$ma = mg - T_2,$$

$$I\varepsilon = (T_1 + T_2)R.$$

Из условия отсутствия проскальзывания нитей вытекают кинематические соотношения:

$$a_c = \varepsilon R, \quad a = 2a_c.$$

Решая записанные уравнения, находим ответ

$$a_c = \frac{M + 2m}{M + 4m + I/R^2} g.$$

Пример 9.4. Однородному сплошному цилиндру массой m и радиусом R сообщили вращение вокруг оси с угловой скоростью ω_0 , положили на горизонтальную плоскость и предоставили самому себе. Определить, через какое время t_0 движение цилиндра перейдет в качение без проскальзывания, если коэффициент трения между цилиндром и плоскостью равен μ . Какая часть начальной кинетической энергии цилиндра перейдет при этом в тепло?

Решение. В горизонтальном направлении цилиндр движется под действием силы трения скольжения $\mathbf{F}$ (рис. 9.6). Уравнения динамики имеют вид

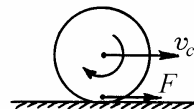


Рис. 9.6

$$m \frac{dv_c}{dt} = \mu mg, \quad \frac{1}{2} m R^2 \frac{d\omega}{dt} = -\mu mg R.$$

Знак “минус” в последнем уравнении обусловлен тем, что момент силы трения вызывает отрицательное угловое ускорение. Выражая отсюда ускорение центра масс и угловое ускорение цилиндра, получаем дифференциальные уравнения

$$\frac{dv_c}{dt} = \mu g, \quad \frac{d\omega}{dt} = -2 \frac{\mu g}{R}.$$

Начальные условия имеют вид: $v_c(0) = 0$, $\omega(0) = \omega_0$. Интегрирование записанных выше уравнений с учетом начальных условий дает

$$v_c = \mu g t, \quad \omega(t) = \omega_0 - \frac{2\mu g}{R} t.$$

Качение с проскальзыванием перейдет в чистое качение в момент времени t_0 , когда начнет выполняться соотношение $v_c = \omega R$, т.е.

$$\mu g t_0 = \omega_0 R - 2\mu g t_0.$$

Отсюда находим

$$t_0 = \frac{\omega_0 R}{3\mu g}, \quad v_c(t_0) = \frac{\omega_0 R}{3}, \quad \omega(t_0) = \frac{\omega_0}{3}.$$

Определяем кинетическую энергию цилиндра в момент времени t_0 :

$$K = K_c + K_\omega.$$

где

$$K_c = \frac{1}{2} m v_c^2(t_0) = \frac{1}{18} m R^2 \omega_0^2, \quad K_\omega = \frac{1}{2} I \omega^2(t_0) = \frac{1}{36} m R^2 \omega_0^2.$$

Учитывая, что начальная кинетическая энергия равна

$$K_0 = \frac{1}{4} m R^2 \omega_0^2,$$

находим, что часть энергии

$$Q = K_0 - K = \frac{1}{6} m R^2 \omega_0^2$$

переходит в тепло. Окончательно

$$K_c = \frac{2}{9} K_0, \quad K_\omega = \frac{1}{9} K_0, \quad Q = \frac{2}{3} K_0.$$

Пример 9.5. Определить характер свободного вращения симметричного волчка. Центр масс волчка считать неподвижным.

Решение. Симметричным волчком называется тело, у которого совпадают два из трех главных момента инерции. Свободным называют вращение, происходящее в отсутствие моментов внешних сил. Используя уравнения Эйлера, для интересующего нас движения можно записать

$$\dot{\omega}_x + \Omega \omega_y = 0, \quad \dot{\omega}_y - \Omega \omega_x = 0, \quad \dot{\omega}_z = 0. \quad (9.14)$$

Здесь

$$\Omega = \frac{I_B - I_A}{I_A} \omega_{z0}, \quad (9.15)$$

и введены обозначения $I_x = I_y \equiv I_A$, $I_z \equiv I_B$, причем $I_A \neq I_B$. В силу того, что в данном случае

$$\omega_z(t) = \omega_{z0} = \text{const}, \quad (9.16)$$

уравнения (9.14) являются линейными. Их решение записывается в виде

$$\omega_x(t) = \omega_0 \cos(\Omega t + \varphi), \quad \omega_y(t) = \omega_0 \sin(\Omega t + \varphi), \quad (9.17)$$

где ω_0 и φ – постоянные. Согласно формулам (9.16), (9.17), вектор мгновенной угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ вращается по конусу вокруг оси OZ , которая является осью симметрии волчка. Это движение происходит равномерно с угловой скоростью Ω . В силу формул (9.12), (9.16), (9.17),

$$N_x(t) = N_0 \cos(\Omega t + \varphi), \quad N_y(t) = N_0 \sin(\Omega t + \varphi), \quad N_z(t) = N_0 = \text{const}.$$

Это означает, что вектор момента импульса волчка также вращается по конической поверхности вокруг оси симметрии волчка синхронно с вектором $\boldsymbol{\omega}$ (рис. 9.7). Так выглядит картина движения векторов $\mathbf{N}$ и $\boldsymbol{\omega}$ относительно главных осей инерции волчка. С другой стороны, относительно лабораторной системы отсчета вектор $\mathbf{N}$ должен быть неподвижным, как того требует

теорема моментов. Следовательно, относительно неподвижной системы отсчета волчок движется так, как если бы он был "вморожен" в конус, катящийся без проскальзывания по поверхности другого конуса (рис. 9.8).

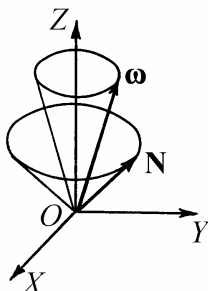


Рис. 9.7

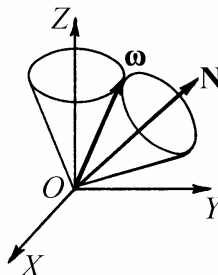


Рис. 9.8

Пример 9.6. Вычислить кинетическую энергию твердого тела, совершающего произвольное движение.

Решение. Согласно теореме Кенига кинетическая энергия твердого тела представима в виде суммы кинетической энергии поступательного движения тела (кинетической энергии центра масс) K_c и кинетической энергии вращения тела вокруг центра масс K_{oc} . Для тела массой m , центр масс которого движется со скоростью v_c ,

$$K_c = \frac{1}{2} m v_c^2.$$

Величину K_{oc} можно вычислить, перейдя в поступательно движущуюся систему отсчета, начало которой помещено в центр масс тела, и воспользоваться результатами, полученными выше для тела с одной неподвижной точкой. Используя определение кинетической энергии и формулу (9.8), получаем

$$\begin{aligned}
 K_{oc} &= \frac{1}{2} \sum_i m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \sum_i m_i \mathbf{v}_i \mathbf{v}_i = \frac{1}{2} \sum_i m_i \mathbf{v}_i [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}_i] = \\
 &= \frac{1}{2} \sum_i m_i \boldsymbol{\omega} [\mathbf{r}_i, \mathbf{v}_i] = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \sum_i [\mathbf{r}_i, m_i \mathbf{v}_i],
 \end{aligned}$$

или

$$K_{oc} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \mathbf{N} = \frac{1}{2} (\omega_x N_x + \omega_y N_y + \omega_z N_z),$$

Принимая во внимание формулы (9.12), последнее выражение можно представить в виде

$$K_{oc} = \frac{1}{2} (I_x \omega_x^2 + I_y \omega_y^2 + I_z \omega_z^2).$$

Окончательно получаем

$$K = \frac{1}{2} m v_c^2 + \frac{1}{2} (I_x \omega_x^2 + I_y \omega_y^2 + I_z \omega_z^2).$$

Задание для самостоятельной работы

9.7. Найти ускорение грузовиков в системе, изображенной на рис. 9.9. Массы грузовиков m_1 и m_2 , момент инерции блока I , радиус R . Грузики могут перемещаться только по вертикали, нить невесома, нерастяжима и не проскальзывает относительно блока. Трение в подшипнике блока пренебрежимо мало.

9.8. Найти угловое ускорение верхнего блока в системе, изображенной на рис. 9.10. Массы блоков и грузика одинаковы, блоки представляют собой однородные диски радиусом R , нить относительно блоков не проскальзывает.

9.9. В системе, изображенной на рис. 9.11, ворот приводится во вращение грузиком массой m , подвешенным на нити, которая намотана на шкив ворота. Масса ворота M , момент инерции I , радиус шкива r . Найти силу растяжения T опоры, на которой подвешен ворот. Изменится ли эта сила, когда грузик будет подниматься вверх вследствие инерции раскрутившегося ворота?

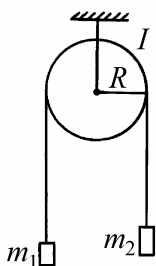


Рис. 9.9

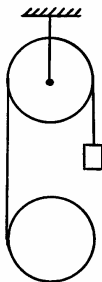


Рис. 9.10

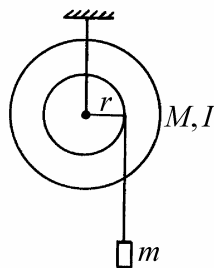


Рис. 9.11

9.10. К нити, намотанной на сплошной однородный цилиндр массой M и радиусом R , привязан грузик массой m . Нить переброшена через блок пренебрежимо малой массы (рис. 9.12). Найти ускорение грузика a и ускорение центра масс цилиндра a_c . Считать, что цилиндр катится без проскальзывания.

9.11. В задаче 9.10 найти, каким должен быть коэффициент трения μ цилиндра о плоскость, чтобы цилиндр катился по плоскости без проскальзывания.

9.12. В задаче 9.10 найти ускорение грузика a и ускорение центра масс цилиндра a_c , считая, что цилиндр катится по плоскости с проскальзыванием. Коэффициент трения цилиндра о плоскость равен μ .

9.13. На подставке, имеющей массу m_1 , укреплен ось, вокруг которой может свободно вращаться цилиндр радиусом R и массой m_2 . Нить, намотанная на цилиндр, прикреплена к телу массой m_3 (рис. 9.13). Определить ус-

корение подставки a_1 при условии, что к телу массой m_3 приложена горизонтальная сила F и трения нет.

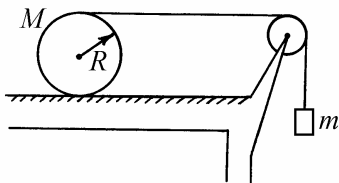


Рис. 9.12

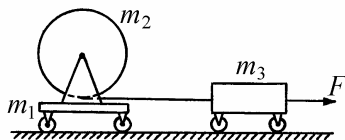


Рис. 9.13

9.14. Однородный цилиндр массой m и радиусом R раскрутили до угловой скорости ω_0 и опустили на доску массой M , лежащую на гладком столе. Коэффициент трения между цилиндром и доской равен μ , трение между доской и столом отсутствует. Найти скорости v_1 и v_2 , которые будут иметь, соответственно, центр масс цилиндра и доска после того, как движение цилиндра относительно доски перейдет в качение без проскальзывания.

9.15. На гладком горизонтальном столе лежит доска массой M , а на ней цилиндр массой m и радиусом R (рис. 9.14). К доске приложена горизонтальная сила F . Найти ускорение доски, считая, что цилиндр катится по доске без проскальзывания. Трением между доской и столом пренебречь.

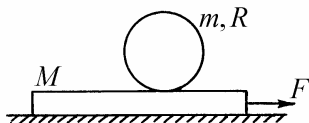


Рис. 9.14

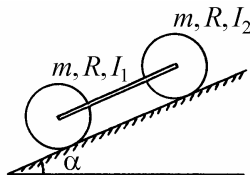


Рис. 9.15

9.16. На гладком горизонтальном столе лежит доска массой M , а на ней цилиндр массой m и радиусом R (рис. 9.14). Коэффициент трения между доской и цилиндром равен μ . Какую наибольшую силу F можно приложить к

доске в горизонтальном направлении, чтобы цилиндр катился по доске без проскальзывания. Трением между доской и столом пренебречь.

9.17. Два катка, связанные штангой, скатываются без проскальзывания по наклонной плоскости, образующей угол α с горизонтом (рис. 9.15). Катки имеют одинаковые массы m и радиусы R ; момент инерции первого катка I_1 , второго I_2 . Найти ускорение, с которым катки скатываются по наклонной плоскости. Массой штанги пренебречь.

9.18. Бильярдному шару ударом сообщили поступательное движение со скоростью v_0 . Через какое время t_0 движение шара перейдет в качение без проскальзывания, если коэффициент трения шара о поверхность бильярдного стола равен μ ?

9.19. Столб высотой h подпиливают у основания. Найти скорость верхнего конца столба в момент падения на землю, если нижний конец столба при падении не смещается.

9.20. Два одинаковых конуса касаются друг друга боковыми поверхностями так, что их оси параллельны. Первый конус вращается с угловой скоростью ω_1 . Найти угловую скорость вращения второго конуса ω_2 . Считать, что сила трения равномерно распределена вдоль линии касания конусов.

§10. Закон сохранения момента импульса

Краткие теоретические сведения

Согласно уравнению моментов (см. §9) скорость изменения момента импульса системы относительно неподвижной точки (полюса) равна сумме моментов внешних сил относительно той же точки:

$$\frac{d\mathbf{N}}{dt} = \mathbf{M}. \quad (10.1)$$

Отсюда следует закон сохранения момента импульса относительно полюса: если сумма моментов внешних сил относительно неподвижного полюса равна нулю, то момент импульса системы относительно полюса сохраняется.

По отношению к любой оси (например, оси OZ) момент импульса можно разложить на две составляющие: параллельную $\mathbf{N}_{||}$ и перпендикулярную $\mathbf{N}_{\perp}$ этой оси: $\mathbf{N} = \mathbf{N}_{||} + \mathbf{N}_{\perp}$. Моментом импульса относительно оси называется проекция N_z вектора $\mathbf{N}$ на эту ось. Очевидно, что вклад в момент импульса относительно оси дает только составляющая $\mathbf{N}_{||}$. Поэтому можно записать, что

$$N_z = k\mathbf{N}_{||}, \quad (10.2)$$

где $\mathbf{k}$ – единичный вектор вдоль оси OZ . Нетрудно показать, что для материальной точки

$$\mathbf{N}_{||} = [\mathbf{r}_{\perp}, m\mathbf{v}_{\perp}], \quad (10.3)$$

где $\mathbf{r}_{\perp}$ и $\mathbf{v}_{\perp}$ – составляющие радиус-вектора точки и ее скорости, перпендикулярные оси. Аналогично определяется $\mathbf{N}_{||}$ для системы материальных точек.

Если сумма моментов внешних сил относительно какой-либо неподвижной оси равна нулю, то момент импульса системы относительно этой оси сохраняется. Это утверждение носит название закона сохранения момента импульса относительно оси.

При решении задач этого раздела необходимо уметь вычислять моменты импульса материальной точки, твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, а также твердого тела, совершающего плоское движение. Рассмотрим эти случаи отдельно.

Момент импульса материальной точки. На рис. 10.1 изображена частица массой m , движущаяся по прямой со скоростью $\mathbf{v}$. Момент импульса этой частицы относительно полюса O перпендикулярен плоскости рисунка и направлен от нас. Величина момента импульса равна

$$N = rmv \sin \alpha = mvR, \quad (10.4)$$

где α – угол между векторами $\mathbf{r}$ и $\mathbf{v}$, $R = r \sin \alpha$. Таким образом, момент импульса материальной точки равен произведению ее импульса на расстояние от начала отсчета (полюса) до линии движения точки. В частности, если выбрать начало отсчета на линии движения точки, то момент импульса будет равен нулю.

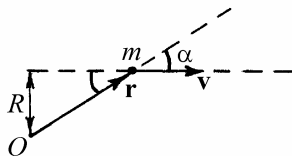


Рис. 10.1. К вычислению момента импульса материальной точки

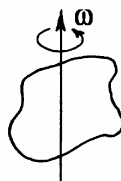


Рис. 10.2. К вычислению момента импульса тела с неподвижной осью вращения

Тело, имеющее неподвижную ось вращения (рис. 10.2). Составляющая момента импульса тела, параллельная оси вращения равна

$$N_{||} = I\omega, \quad (10.5)$$

где I – момент инерции тела относительно оси вращения, ω – вектор угло-

вой скорости.

Вращающееся тело обладает кинетической энергией

$$K = \frac{I\omega^2}{2}. \quad (10.6)$$

Плоское движение твердого тела. При плоском движении ось вращения тела движется поступательно, не меняя своей ориентации в пространстве. Составляющая момента импульса тела, параллельная оси вращения, равна

$$N_{||} = [\mathbf{r}_{c\perp}, m\mathbf{v}_c] + I_c\omega. \quad (10.7)$$

Здесь m – масса тела, $\mathbf{v}_c$ – скорость центра масс, I_c – момент инерции тела относительно оси, проходящей через центр масс, $\mathbf{r}_{c\perp}$ – составляющая радиус-вектора центра масс тела, перпендикулярная оси вращения (рис. 10.3).

В неподвижной системе отсчета кинетическая энергия тела согласно теореме Кенига может быть представлена в виде

$$K = \frac{mv_c^2}{2} + \frac{I_{\tilde{n}}\omega^2}{2}, \quad (10.8)$$

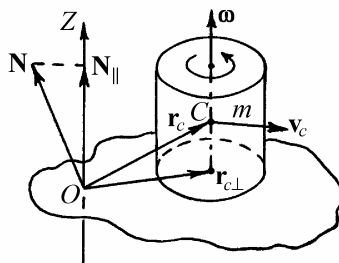


Рис. 10.3. Плоское движение твердого тела

Примеры решения задач

Пример 10.1. Показать, что движение материальной точки в центральном силовом поле является плоским.

Решение. Рассмотрим для определенности гравитационное поле. На рис. 10.4 показан силовой центр массой M и материальная точка массой m , движущаяся по некоторой орбите в поле силового центра. Положение матери-

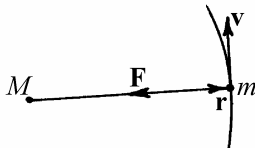


Рис. 10.4

альной точки относительно силового центра характеризуется радиус-вектором $\mathbf{r}$, скорость точки обозначена через $\mathbf{v}$. На точку действует сила тяготения $\mathbf{F}$, направленная в сторону силового центра. Поскольку векторы $\mathbf{r}$ и $\mathbf{F}$ направлены в противоположные стороны, их векторное произведение равно нулю. Следовательно, момент силы тяготения относительно силового центра равен нулю, и момент импульса материальной точки сохраняется:

$$\mathbf{N} = [\mathbf{r}, m\mathbf{v}] = \text{const}.$$

Отсюда следует, что в процессе движения радиус-вектор частицы и ее скорость не выходят за пределы одной и той же фиксированной плоскости, перпендикулярной вектору $\mathbf{N}$. Иными словами движение частицы является плоским.

Пример 10.2. Показать, что при движении в центральном силовом поле радиус-вектор частицы очерчивает равные площади за равные промежутки времени (закон постоянства секторной скорости).

Решение. На рис. 10.5 показана траектория движения частицы в поле силового центра.

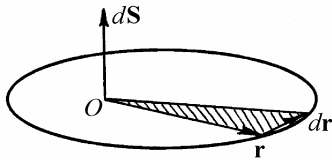


Рис. 10.5

Пусть $\mathbf{r}$ – радиус-вектор частицы в некоторый момент времени t , а $d\mathbf{r}$ – приращение радиус-вектора за малое время dt . Назовем секторной площадью dS половину векторного произведения векторов $\mathbf{r}$ и $d\mathbf{r}$:

$$dS = \frac{1}{2}[\mathbf{r}, d\mathbf{r}].$$

Вектор $d\mathbf{S}$ перпендикулярен плоскости орбиты частицы, а его величина равна площади треугольника, построенного на векторах $\mathbf{r}$ и $d\mathbf{r}$. Этот тре-

угольник заштрихован на рис. 10.5. Назовем секторной скоростью частицы σ отношение секторной площади dS к промежутку времени dt , за который частица совершает перемещение $d\mathbf{r}$:

$$\sigma = \frac{dS}{dt}.$$

Подставляя в эту формулу выражение для dS , приведенное выше, получим

$$\sigma = \frac{1}{2} \left[\mathbf{r}, \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right] = \frac{1}{2} [\mathbf{r}, \mathbf{v}],$$

где $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$ – скорость частицы. Учитывая определение момента импульса частицы, выражение для секторной скорости можно представить в виде

$$\sigma = \frac{1}{2m} \mathbf{N},$$

где $\mathbf{N}$ – вектор момента импульса, m – масса частицы. При движении в центральном поле момент импульса частицы сохраняется (см. пример 10.1): $\mathbf{N} = \text{const}$. Отсюда следует сохранение секторной скорости

$$\sigma = \text{const}.$$

Это означает, что при движении в центральном силовом поле радиус-вектор частицы относительно силового центра очерчивает равные площади за равные промежутки времени.

Закон постоянства секторной площади позволяет наглядно представить характер движения частицы в центральном силовом поле. Рисунок 10.6 иллюстрирует движение по эллиптической траектории. На этом рисунке заштрихованы два сектора, имеющие одинаковые площади. Один из них опирается на участок траектории, близкий к силовому центру, а другой – на периферическую часть орбиты. По закону постоянства

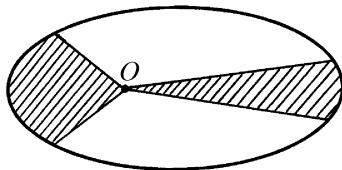


Рис. 10.6

секторной скорости частица проходит оба участка орбиты за равные промежутки времени. Однако, как видно из рис. 10.6, первый из этих участков значительно длиннее второго. Это значит, что скорость частицы на эллиптической орбите велика вблизи силового центра и мала вдали от него. Таким образом, двигаясь в центральном поле, частица увеличивает свою скорость по мере приближения к силовому центру и замедляет движение по мере удаления от него.

Пример 10.3. Известен закон движения частицы массой m в полярных координатах: $r = r(t)$, $\varphi = \varphi(t)$. Вычислить момент импульса частицы относительно начала координат.

Решение. На рис. 10.7 показаны полярные координаты точки r и φ , а также ее декартовы координаты x и y . Как видно из этого рисунка,

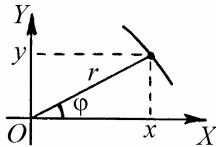


Рис. 10.7

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi.$$

Дифференцируя эти формулы по времени, получим выражения для декартовых проекций скорости частицы:

$$v_x = \dot{x} = \dot{r} \cos \varphi - r \dot{\varphi} \sin \varphi, \quad v_y = \dot{y} = \dot{r} \sin \varphi + r \dot{\varphi} \cos \varphi.$$

Следовательно, вектор момента импульса частицы

$$\mathbf{N} = [\mathbf{r}, m\mathbf{v}] = m \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x & y & 0 \\ \dot{x} & \dot{y} & 0 \end{vmatrix} = km(x\dot{y} - \dot{x}y) = kmr^2\dot{\varphi}.$$

Здесь $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ – орты декартовой системы координат по осям OX , OY , OZ .

Пример 10.4. Квадратная досочка массой M со стороной a может вращаться без трения вокруг вертикальной оси OO' , совпадающей с одной из ее сторон (рис. 10.8). Первоначально досочка покоится, а перпендикулярно ее поверхности движется шарик массой m со скоростью v_0 . Место удара шарика о досочку находится на расстоянии, равном $2a/3$ от оси вращения. Считая удар абсолютно упругим, найти угловую скорость вращения досочки после соударения.

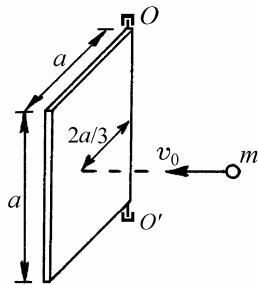


Рис. 10.8

Решение. Поскольку момент внешних сил относительно оси вращения досочки равен нулю, момент импульса системы “шарик – досочка” относительно этой оси сохраняется. Направив ось OX вдоль направления движения шарика, можно записать

$$mv_0 \frac{2}{3}a = I\omega + mv_x \frac{2}{3}a,$$

где

$$I = \frac{1}{3}Ma^2$$

– момент инерции досочки относительно оси вращения, v_x – скорость шарика после удара в проекции на ось OX . Здесь мы предположили, что удар является достаточно коротким, так что за время удара досочка не успевает повернуться на заметный угол, и линия движения шарика после удара совпадает с линией, по которой он двигался до удара. Закон сохранения энергии в системе дает соотношение

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{I\omega^2}{2} + \frac{mv_x^2}{2}.$$

Здесь ω – угловая скорость вращения доски после удара. Из приведенных уравнений следует, что

$$v_x = v_0 - \frac{M}{2m} a \omega,$$

где

$$\omega = \frac{12mv_0}{(4m + 3M)a}.$$

Пример 10.5. Стержень массой M и длиной l подвешен за один из концов

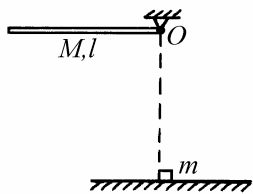


Рис. 10.9

на шарнире O , как показано на рис. 10.9. Стержень падает из горизонтального положения, и в момент, когда он проходит вертикальное положение, ударяет по кубику массой m , сообщая ему движение по горизонтальной плоскости. Найти скорость v кубика после удара, считая удар абсолютно неупругим.

Решение. Применяя закон сохранения энергии, находим угловую скорость вращения стержня ω_0 в момент, когда он занимает вертикальное положение:

$$Mg \frac{l}{2} = \frac{I\omega_0^2}{2},$$

где $I = \frac{1}{3}Ml^2$. Отсюда

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{3g}{l}}.$$

При кратковременном взаимодействии между нижним концом стержня и кубиком момент импульса системы не изменяется. Поскольку удар абсо-

лотно неупругий, линейные скорости конца стержня и кубика непосредственно после удара совпадают:

$$\omega l = v.$$

Учитывая это, закон сохранения момента импульса относительно шарнира O можно записать в виде

$$I\omega_0 = I\omega + mvl.$$

Объединяя уравнения, приведенные выше, находим

$$v = \frac{M}{M + 3m} \sqrt{3gl}.$$

Задание для самостоятельной работы

10.6. На карусели с моментом инерции I стоит человек массой m . С какой угловой скоростью ω будет вращаться карусель, если человек пойдет по окружности радиусом r со скоростью u относительно карусели? Моментом инерции тела человека относительно его вертикальной оси пренебречь.

10.7. Тонкий однородный стержень длиной L подвешен за один конец и может вращаться без трения вокруг горизонтальной оси (рис. 10.10). К той же оси подвешен на нити длиной l маленький шарик, масса которого равна массе стержня. Шарик отклоняют на некоторый угол и отпускают. При какой длине нити шарик после удара о стержень остановится? Удар считать абсолютно упругим.

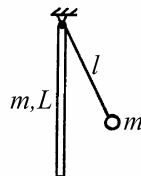


Рис. 10.10

10.8. На гладкой горизонтальной плоскости лежит стержень массой M и длиной L . В стержень ударяется шарик массой m , движущийся перпендикулярно стержню. На каком расстоянии l от середины стержня должен про-

изойти удар, чтобы угловая скорость вращения стержня была максимальной? Удар считать абсолютно упругим.

10.9. Каким участком сабли следует рубить лозу, чтобы рука не чувствовала удара? Саблю считать однородной пластиной длиной l .

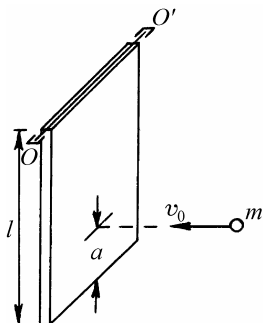


Рис. 10.11

10.10. Однородный сосновый брус массой M , размеры которого указаны на рисунке 10.11, может свободно вращаться вокруг горизонтальной оси OO' . В точку A бруса ударяет горизонтально летящее ядро массой m . Какова начальная скорость ядра v_0 , если брус отклонился на угол φ , а ядро упало на месте удара?

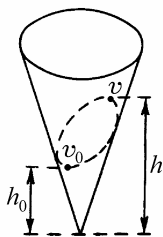


Рис. 10.12

10.11. По внутренней поверхности конической воронки, стоящей вертикально, без трения скользит маленький шарик (рис. 10.12). В начальный момент шарик находился на высоте h_0 и имел скорость v_0 , направленную горизонтально. Найти величину v_0 , если известно, что при дальнейшем движении шарик поднимается до высоты h , а затем начинает опускаться. Найти также скорость шарика v в момент, когда он достигает максимальной высоты h .

10.12. Маленький шарик подвешен на нити длиной l . В начальный момент нить составляет с вертикалью угол ϑ_0 , а шарик имеет скорость v_0 , направленную горизонтально. Найти величину v_0 , если известно, что при дальнейшем движении угол отклонения нити от вертикали возрастает до величины ϑ , а затем начинает уменьшаться. Найти также скорость шарика v в момент, когда угол отклонения нити от вертикали достигает максимальной величины ϑ . Сопротивлением воздуха пренебречь.

10.13. Планета движется по замкнутой траектории в гравитационном поле

звезды. Найти минимальную v_0 и максимальную v скорости планеты в процессе движения, если известны минимальное r_0 и максимальное r расстояния между планетой и звездой. Звезду считать неподвижным силовым центром массой M . Гравитационная постоянная G .

10.14. На краю свободно вращающейся карусели стоит человек массой m . Какую работу должен совершить человек, чтобы перейти к центру карусели? Радиус карусели R , момент инерции I . Начальная угловая скорость вращения карусели ω_0 . Моментом инерции тела человека относительно его вертикальной оси пренебречь.

10.15. В тонкую доску, лежащую на гладком горизонтальном столе, попадает пуля, летящая перпендикулярно доске и параллельно плоскости стола и застревает в доске. Масса доски M , масса пули m , начальная скорость пули v_0 . Определить кинетическую энергию K , перешедшую во внутреннюю энергию системы, если точка попадания пули находится от конца доски на расстоянии, равном $1/4$ ее длины. Считать, что $m \ll M$.

10.16. На гладкой горизонтальной поверхности лежит тонкий однородный стержень длиной L . По одному из концов стержня наносят горизонтальный удар в направлении, перпендикулярном стержню. На какое расстояние S сместится центр масс стержня за время его полного оборота?

§11. Динамика систем со связями. Уравнения Лагранжа и Гамильтона

Краткие теоретические сведения

Связями в механике называют не вытекающие из уравнений движения ограничения на координаты, скорости и ускорения отдельных точек системы. Связи реализуются посредством поверхностей различных тел, стержнями, нитями и т.п. Математически связи выражаются уравнениями связей, т.е. соотношениями между координатами точек системы, их скоростями и ускорениями. Силы, с которыми тела, осуществляющие связи, действуют на тела системы, называются силами реакции или просто реакциями связей. Помимо сил реакции на тела системы действуют силы, которые известны заранее или являются известными функциями координат и скоростей точек рассматриваемой системы, например, силы тяготения, силы упругости, силы Лоренца. Такие силы называют заданными или активными.

Классификацию связей проводят на основе вида уравнения связи. Различают голономные и неголономные, стационарные и нестационарные, идеальные и неидеальные связи. Если связь сводится к ограничениям на координаты тел, то она называется голономной (в противном случае – неголономной). Уравнения голономных связей можно представить в виде

$$f_{\alpha}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N, t) = 0, \quad \alpha = 1, 2, \dots, k, \quad (11.1)$$

где N – число материальных точек системы, k – число связей. Очевидно, что голономные связи налагают ограничения не только на положения, но и на скорости и ускорения точек системы, в чем можно убедиться, дифференцируя (11.1) по времени. Однако характерным для голономных связей является то, что вытекающие из них уравнения, связывающие скорости и ускорения точек системы, могут быть проинтегрированы до решения уравнений движения.

Стационарной называется связь, уравнение которой не содержит

времени в явном виде. Если же время явным образом входит в уравнение связи, то связь называется нестационарной. Примером системы с нестационарной связью является математический маятник, длина нити которого меняется по заданному закону. Особенностью систем с нестационарными связями является то, что их полная механическая энергия может меняться с течением времени. Это происходит за счет работы тел, осуществляющих нестационарную связь.

Основная задача механики несвободной системы состоит в отыскании закона движения тел по заданным силам и уравнениям связей. При решении этой задачи возникают две основные трудности: координаты тел взаимозависимы, а силы реакции заранее не известны. Первая из этих проблем решается путем перехода к независимым обобщенным координатам, вторая – путем исключения сил реакции из уравнений движения системы. Последнее возможно лишь для определенного класса систем, а именно, для систем с идеальными связями.

Числом степеней свободы системы s называется число независимых координат, полностью определяющих положение системы в пространстве, а сами независимые координаты $q_1, q_2, \dots, q_s$ называются обобщенными координатами системы. Обобщенными скоростями системы $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_s$ называются производные обобщенных координат по времени. Для краткости всю совокупность обобщенных координат будем обозначать через q , а совокупность обобщенных скоростей – через $\dot{q}$.

Для голономной системы, состоящей из отдельных материальных точек, число степеней свободы можно подсчитать по формуле

$$s = 3N - k. \quad (11.2)$$

В самом деле, используя уравнения связей (11.1), можно выразить k каких-либо координат через остальные $3N - k$ координат. Эти $3N - k$ координат являются независимыми, следовательно их число равно числу степеней свободы системы. Например, математический маятник, для которого $N = 1$, $k = 1$, имеет две степени свободы, а две материальные точки, связанные жестким невесомым стержнем ($N = 2$, $k = 1$), имеют пять степеней свободы.

Обобщенные координаты должны удовлетворять двум требованиям. Во-первых, радиус-векторы точек системы должны быть однозначными функциями $q_1, q_2, \dots, q_s$:

$$\mathbf{r}_l = \mathbf{r}_l(q_1, q_2, \dots, q_s, t), \quad l = 1, 2, \dots, N, \quad (11.3)$$

Во-вторых, координаты $q_1, q_2, \dots, q_s$ должны быть выбраны в соответствии с уравнениями связей, т.е. должны обращать их в тождества.

Действительным перемещением точки $d\mathbf{r}$ называется бесконечно малое перемещение этой точки под действием как заданных сил, так и сил реакции связей. Действительное перемещение происходит за время dt в соответствии с уравнениями движения и начальными условиями.

Виртуальным перемещением $\delta\mathbf{r}$ называется воображаемое бесконечно малое перемещение точки, допускаемое связями в данный фиксированный момент времени. Виртуальное перемещение не обладает длительностью и не зависит от заданных сил. Используя формулу (11.3), вектор виртуального перемещения l -ой материальной точки системы можно представить в виде

$$\delta\mathbf{r}_l = \sum_{j=1}^s \frac{\partial \mathbf{r}_l}{\partial q_j} \delta q_j, \quad l = 1, 2, \dots, N \quad (11.4)$$

Здесь δq_j – вариация обобщенной координаты q_j . Виртуальной работой называется работа силы на виртуальном перемещении.

Идеальными называются связи, виртуальная работа сил реакции которых равна нулю. Обозначив через $\mathbf{R}_l$ силу реакции, действующую на материальную точку системы с номером l , условие идеальности связей можно представить в виде

$$\delta A_R = \sum_{l=1}^N \mathbf{R}_l \delta \mathbf{r}_l = 0. \quad (11.5)$$

Идеальными являются связи, задаваемые идеально гладкими поверхностями любой формы, невесомыми нерастяжимыми стержнями или нитями, а

также связи, возникающие при качении без проскальзывания. Неидеальными являются системы, в которых скольжение тел происходит вдоль шероховатых поверхностей.

Уравнения движения системы с идеальными голономными связями (или вообще без связей) могут быть представлены в форме уравнений Лагранжа:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial K}{\partial q_j} = Q_j, \quad j = 1, 2, \dots, s, \quad (11.6)$$

где $K = K(q, \dot{q})$ – кинетическая энергия системы, выраженная через обобщенные координаты и обобщенные скорости (для систем с нестационарными связями возможна также явная зависимость от времени),

$$Q_j = \sum_{l=1}^N \mathbf{F}_l \frac{\partial \mathbf{r}_l}{\partial q_j} \quad (11.7)$$

– обобщенная сила, соответствующая обобщенной координате q_j . Здесь $\mathbf{F}_l$ – сумма заданных сил, действующих на материальную точку с номером l , $\mathbf{r}_l$ – радиус-вектор этой точки.

Если заданные силы потенциальны, то для системы частиц можно построить функцию Лагранжа. Функцией Лагранжа или лагранжианом называют разность кинетической и потенциальной энергий системы, выраженную через обобщенные координаты и обобщенные скорости:

$$L(q, \dot{q}) = K(q, \dot{q}) - \Pi(q). \quad (11.8)$$

С помощью этой функции уравнения Лагранжа можно переписать в более удобном виде:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, s. \quad (11.9)$$

Уравнения Лагранжа в независимых координатах не содержат реакций связей, хотя полностью учитывают влияние связей на движение системы. Эти уравнения являются очень удобным и эффективным средством анализа динамики механических систем с идеальными голономными связями.

В аналитической механике часто используется понятие обобщенного импульса. Обобщенным импульсом p_j называется частная производная функции Лагранжа по соответствующей обобщенной скорости

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}, \quad j = 1, 2, \dots, s. \quad (11.10)$$

Формула (11.10) позволяет переписать уравнения (11.9) в виде

$$\dot{p}_j = \frac{\partial L}{\partial q_j}. \quad (11.11)$$

Уравнение (11.11) представляет собой закон изменения обобщенного импульса. Обобщенная координата, которая не входит в лагранжиан явным образом, называется циклической. Уравнение (11.11) показывает, что если координата q_j является циклической, т.е. $\partial L / \partial q_j = 0$, то соответствующий этой координате обобщенный импульс сохраняется: $p_j = \text{const}$. Это утверждение носит название закона сохранения обобщенного импульса.

Совокупность обобщенных координат и обобщенных импульсов системы q, p называют каноническими переменными. Если в качестве переменных, характеризующих состояние механической системы, использовать канонические переменные, то уравнения движения приобретают вид

$$\dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j}, \quad \dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j}, \quad j=1, 2, \dots, s. \quad (11.12)$$

Эти уравнения называются уравнениями Гамильтона. Здесь $H = H(q, p, t)$ – функция Гамильтона (гамильтониан) системы, определяемая формулой

$$H = \sum_{j=1}^s \dot{q}_j p_j - L. \quad (11.13)$$

Переход от обобщенных скоростей к обобщенным импульсам производится с помощью формул (11.10), которые можно рассматривать как систему уравнений, связывающих между собой величины $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_s$ и $p_1, p_2, \dots, p_s$.

Если гамильтониан системы не содержит явной зависимости от времени, то система называется консервативной. К числу консервативных систем относятся системы с идеальными голономными стационарными связями (или вообще без связей) и потенциальными заданными силами. Гамильтониан консервативной системы есть постоянная движения, имеющая смысл полной механической энергии системы:

$$H(q, p) = K(q, p) + \Pi(q). \quad (11.14)$$

Примеры решения задач

Пример 11.1. Два грузика массами m_1 и m_2 связаны невесомой нерастяжимой нитью, перекинутой через блок с радиусом R и моментом инерции I (рис. 11.1). Ось блока неподвижна, грузики могут перемещаться только по вертикали, нить не проскальзывает относительно блока и все время натянута, трение в подшипнике пренебрежимо мало. Найти лагранжиан системы и получить уравнение Лагранжа.

Решение. Определим число степеней свободы в рассматриваемой системе,

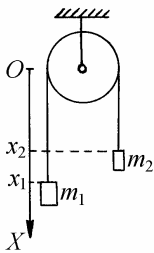


Рис. 11.1

состоящей из двух материальных точек и твердого тела (блока). В отсутствие связей ее конфигурация описывается двенадцатью независимыми координатами. Число связей, ограничивающих положение блока, равно пяти: тремя связями зафиксирован его центр, и две связи задают постоянное направление оси вращения. Кроме того, четыре связи ограничивают перемещение грузиков, давая им возможность двигаться только по вертикали. Из условия нерастяжимости нити длины $l = \text{const}$ вытекает соотношение

$$x_1 + x_2 + \pi R - l = \text{const}.$$

Наконец, вследствие отсутствия проскальзывания нити по блоку его поворот однозначно связан с перемещениями каждого из грузиков. В итоге получаем, что на рассматриваемую систему наложено 11 связей и число ее степеней свободы $s = 1$.

В качестве обобщенной координаты, описывающей положение системы, выберем угол поворота блока φ , отсчитываемый против часовой стрелки. Полагая, что $\varphi = 0$, когда левый грузик находится в верхнем положении, получаем формулы, выражающие декартовы координаты грузиков x_1 и x_2 через обобщенную координату φ :

$$x_1 = R\varphi, \quad x_2 = l - \pi R - R\varphi.$$

Кинетическая энергия системы равна

$$K = \frac{m_1 \dot{x}_1^2}{2} + \frac{m_2 \dot{x}_2^2}{2} + \frac{I \dot{\varphi}^2}{2} = \left((m_1 + m_2)R^2 + I \right) \frac{\dot{\varphi}^2}{2}.$$

Находим потенциальную энергию

$$\Pi = -m_1 g x_1 - m_2 g x_2 = -(m_1 - m_2) g R \varphi - m_2 g (l - \pi R)$$

и лагранжиан системы

$$L = K - \Pi = \left((m_1 + m_2) R^2 + I \right) \frac{\dot{\varphi}^2}{2} + (m_1 - m_2) g R \varphi.$$

В последнем выражении опущено несущественное слагаемое $m_2 g (l - \pi R) = \text{const}$. Вычисляем производные, входящие в уравнения Лагранжа:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \left((m_1 + m_2) R^2 + I \right) \dot{\varphi}, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \right) = \left((m_1 + m_2) R^2 + I \right) \ddot{\varphi}, \quad \frac{\partial L}{\partial \varphi} = (m_1 - m_2) g R.$$

Окончательно имеем

$$\left((m_1 + m_2) R^2 + I \right) \ddot{\varphi} - (m_1 - m_2) g R = 0.$$

Пример 11.2. На горизонтальной плоскости лежит клин массой M , а на верхней грани клина располагается брусок массой m (рис. 11.2). Все поверхности абсолютно гладкие. Найти лагранжиан системы и записать уравнения Лагранжа. Движение всех тел происходит в плоскости рисунка, брусок от поверхности клина не отрывается.

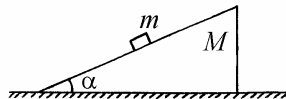


Рис. 11.2

Решение. В отсутствие связей материальная точка (брусок) и твердое тело (клин) обладают девятью степенями свободы. Легко убедиться, что число связей в рассматриваемой системе равно семи (пять связей ограничивают перемещение клина так, что он может двигаться только поступательно вдоль горизонтальной прямой, одна связь ограничивает движение бруска в плоскости рисунка, и одна связь отражает то условие, что брусок не поки-

дает поверхность клина). Следовательно, система имеет две степени свободы.

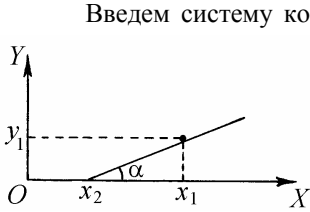


Рис. 11.3

Введем систему координат, как показано на рис. 11.2. В качестве обобщенных координат выберем горизонтальную координату бруса x_1 и координату острия клина x_2 (рис. 11.3). Вертикальная координата бруса y_1 связана с обобщенными координатами x_1, x_2 соотношением

$$y_1 = (x_1 - x_2) \operatorname{tg} \alpha .$$

Найдем кинетическую энергию системы

$$K = \frac{m}{2} (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{M}{2} \dot{x}_2^2 = m \left(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha \right) \frac{\dot{x}_1^2}{2} - m \dot{x}_1 \dot{x}_2 \operatorname{tg}^2 \alpha + \left(M + m \operatorname{tg}^2 \alpha \right) \frac{\dot{x}_2^2}{2} .$$

Потенциальная энергия равна

$$\Pi = mgy_1 = mg(x_1 - x_2) \operatorname{tg} \alpha .$$

Получаем лагранжиан системы

$$L = m \left(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha \right) \frac{\dot{x}_1^2}{2} - m \dot{x}_1 \dot{x}_2 \operatorname{tg}^2 \alpha + \left(M + m \operatorname{tg}^2 \alpha \right) \frac{\dot{x}_2^2}{2} - mg(x_1 - x_2) \operatorname{tg} \alpha$$

и записываем уравнения движения

$$\begin{aligned} m(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) \ddot{x}_1 - m \ddot{x}_2 \operatorname{tg}^2 \alpha + m g \operatorname{tg} \alpha &= 0 , \\ - m \ddot{x}_1 \operatorname{tg}^2 \alpha + (M + m \operatorname{tg}^2 \alpha) \ddot{x}_2 - m g \operatorname{tg} \alpha &= 0 \end{aligned}$$

Пример 11.3. Найти лагранжиан и записать уравнение Лагранжа для однородного цилиндра радиусом r , катящегося без проскальзывания по внут-

ренной стороне цилиндрической поверхности радиусом R (рис. 11.4).

Решение. Подсчет числа степеней свободы показывает, что в рассматриваемой системе $s=1$. В качестве обобщенной координаты, описывающей положение цилиндра, выберем угол φ между вертикалью и линией, соединяющей ось цилиндрической поверхности радиусом R и ось цилиндра. Тогда скорость центра масс цилиндра выразится формулой

$$v_c = (R - r)\dot{\varphi},$$

а угловая скорость вращения цилиндра вокруг его оси $\dot{\psi}$ определяется соотношением

$$r\dot{\psi} = (R - r)\dot{\varphi}, \text{ или } \dot{\psi} = \frac{R - r}{r}\dot{\varphi}.$$

Здесь ψ – угол между вертикалью и какой-либо фиксированной линией, перпендикулярной оси цилиндра (рис. 11.4). Кинетическую энергию цилиндра найдем с помощью теоремы Кенига:

$$K = \frac{mv_c^2}{2} + \frac{I_c\omega^2}{2} = m(R - r)^2 \frac{\dot{\varphi}^2}{2} + \frac{1}{2}mr^2 \frac{\dot{\psi}^2}{2} = \frac{3}{2}m(R - r)^2 \frac{\dot{\varphi}^2}{2}.$$

Потенциальная энергия цилиндра в поле силы тяжести равна

$$\Pi = mg(R - r)(1 - \cos\varphi).$$

(За уровень отсчета потенциальной энергии выбрано положение центра масс в самой нижней точке траектории цилиндра). Лагранжиан системы

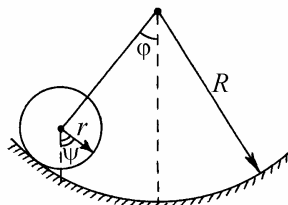


Рис. 11.4

$$L = \frac{3}{2} m(R-r)^2 \frac{\dot{\varphi}^2}{2} - mg(R-r)(1 - \cos \varphi),$$

а уравнение движения цилиндра

$$\frac{3}{2} m(R-r)^2 \ddot{\varphi} + mg(R-r) \sin \varphi = 0.$$

Пример 11.4. Найти функцию Лагранжа для плоского математического маятника массой m и длиной l (рис. 11.5), точка подвеса которого совершает заданное движение по закону $y = a \cos \omega t$, где a и ω – положительные постоянные.

Решение. Так как координата точки подвеса маятника в каждый момент времени известна, она не является независимой переменной. Следовательно, рассматриваемая система имеет одну степень свободы. Положение маятника будем характеризовать обобщенной координатой φ , имеющей смысл угла отклонения маятника от вертикали (рис. 11.5). Для декартовых координат материальной точки массой m имеем

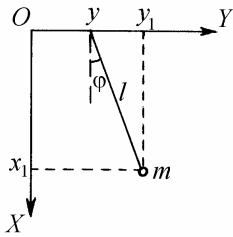


Рис. 11.5

$$x_1 = l \cos \varphi, \quad y_1 = a \cos \omega t + l \sin \varphi.$$

Кинетическая энергия маятника

$$K = \frac{m(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2)}{2} = m \left(l^2 \frac{\dot{\varphi}^2}{2} - a l \omega \dot{\varphi} \sin \omega t \cos \varphi \right) + m a^2 \omega^2 \sin^2 \omega t. \quad (11.15)$$

Потенциальная энергия

$$\Pi = -mgx_1 = -mgl \cos \varphi.$$

Записывая лагранжиан системы, будем иметь в виду, что члены, зависящие только от времени, но не зависящие от обобщенной координаты и скорости системы, как, например, последнее слагаемое в (11.15), можно опустить, поскольку в уравнения движения они не войдут. Окончательно имеем

$$L = m l^2 \frac{\dot{\varphi}^2}{2} - m a l \omega \dot{\varphi} \sin \omega t \cos \varphi + m g l \cos \varphi.$$

Пример 11.5. Построить гамильтониан материальной точки массой m , находящейся в потенциальном силовом поле. Потенциальная энергия частицы задана как функция ее декартовых координат: $\Pi = \Pi(x, y, z)$.

Решение. Система имеет три степени свободы. В качестве обобщенных координат выберем декартовы координаты материальной точки x, y, z . Тогда ее обобщенными скоростями будут величины $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$. Кинетическая энергия

$$K = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2).$$

Функция Лагранжа

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - \Pi(x, y, z).$$

Так как эта функция не содержит явной зависимости от времени, система является консервативной. Следовательно, гамильтониан системы равен сумме кинетической и потенциальной энергий системы, выраженной через обобщенные координаты и обобщенные импульсы:

$$H = K + \Pi = H(p, q).$$

Вычисляем обобщенные импульсы:

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}, \quad p_y = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\dot{y}, \quad p_z = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m\dot{z}.$$

Используя эти соотношения, выражаем обобщенные скорости через обобщенные импульсы:

$$\dot{x} = \frac{p_x}{m}, \quad \dot{y} = \frac{p_y}{m}, \quad \dot{z} = \frac{p_z}{m}.$$

Подставив эти выражения в формулу для кинетической энергии, находим ее как функцию обобщенных импульсов:

$$K = \frac{1}{2m} (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2),$$

и получаем гамильтониан

$$H = \frac{1}{2m} (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + \Pi(x, y, z).$$

Задание для самостоятельной работы

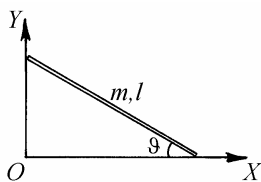


Рис. 11.6

11.6. Получить функцию Лагранжа и записать уравнение движения для однородного стержня массой m и длиной l , который скользит в поле силы тяжести, опираясь одним концом о вертикальную, а другим – о горизонтальную плоскости (рис. 11.6). Трением пренебречь.

11.7. Получить функцию Лагранжа и записать уравнение движения для однородного стержня массой m и длиной l который движется без трения в поле силы тяжести, опираясь на внутреннюю поверхность цилиндра радиусом R (рис. 11.7). Движение происходит в плоскости рисунка.

11.8. Записать функцию Лагранжа и найти уравнение движения плоского

математического маятника массой m , длина подвеса которого меняется по закону $l = l_0 + v_0 t$, где $v_0 = \text{const}$ (рис. 11.8).

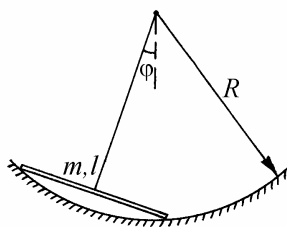


Рис. 11.7

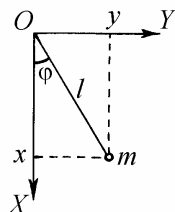


Рис. 11.8

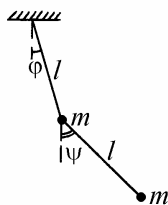


Рис. 11.9

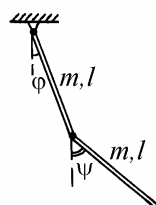


Рис. 11.10

11.9. Получить функцию Лагранжа для математического маятника массой m и длиной l , выбрав в качестве обобщенных координат углы ϑ и φ сферической системы координат.

11.10. Получить функцию Лагранжа для симметричного двойного плоского математического маятника, показанного на рис. 11.9.

11.11. Получить функцию Лагранжа для двойного плоского физического маятника, состоящего из двух одинаковых стержней массой m и длиной l каждый (рис. 11.10).

11.12. Получить функцию Лагранжа для плоского математического маятника массой m и длиной l , точка подвеса которого массой M может свободно двигаться по горизонтальной прямой (рис. 11.11). Трением пренебречь. В качестве обобщенных координат выбрать координату x точки подвеса маятника и угол φ отклонения маятника от

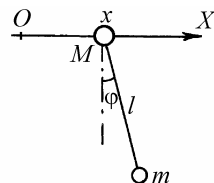


Рис. 11.11

вертикали.

11.13. Получить гамильтониан плоского математического маятника массой m и длиной l , считая обобщенной координатой угол отклонения маятника от вертикали φ .

11.14. Построить гамильтониан для математического маятника массой m и длиной l , выбрав в качестве обобщенных координат углы сферической системы координат ϑ и φ .

11.15. Две материальные точки массой m каждая соединены жестким невесомым стержнем длиной l . Пренебрегая действием внешних силовых полей записать гамильтониан этой системы, выбрав в качестве обобщенных координат декартовы координаты x, y, z центра масс системы и сферические углы ϑ, φ , задающие ориентацию стержня в пространстве.

11.16. Небольшое тело массой m опустили на неподвижную гладкую поверхность и предоставили самому себе. Уравнение поверхности в декартовых координатах имеет вид $z = z(x, y)$, причем оси OX и OY лежат в горизонтальной плоскости, а ось OZ направлена по вертикали вверх. Предполагая, что при движении тело не отрывается от поверхности, записать для него функцию Лагранжа. Для случая $z(x, y) = \frac{1}{2a}(x^2 + y^2)$, где a – положительная постоянная, получить уравнения Лагранжа.

§12. Статика. Равновесие механической системы

Краткие теоретические сведения

Статикой называется раздел механики, в котором изучаются условия равновесия твердых тел, или систем тел, под действием приложенных к ним сил. Сила, действующая на твердое тело, характеризуется величиной, направлением и точкой приложения. В задачах статики выделяют два типа сил:

- 1) контактные силы, возникающие при соприкосновении тел. К ним относятся силы упругости, силы трения и силы давления жидкости или газа;
- 2) дальнедействующие силы, действующие на расстоянии между телами. К ним относятся гравитационные и электромагнитные силы.

Силы упругости и трения приложены к телу в точке или в плоскости соприкосновения с другим твердым телом. Силы давления жидкости (газа) приложены ко всем точкам поверхности тела, окруженной жидкостью (газом). Гравитационные силы действуют на каждую точку внутри тела. Их равнодействующая приложена к некоторой точке пространства, связанной с телом: к его центру тяжести.

Вектор силы определяет линию, вдоль которой действует сила – линию действия. Две силы, действующие на твердое тело, уравниваются тогда и только тогда, когда линии их действия лежат на одной прямой, силы равны по величине и действуют в противоположных направлениях. Перенос точки приложения силы, действующей на твердое тело, вдоль линии ее действия не влияет на изменение механического состояния тела. Таким образом, в задачах статики можно переносить точку приложения силы вдоль линии действия.

Равновесие (покой) – это такое состояние механической системы, в котором она будет находиться все время, если в начальный момент она в нем находилась и имела нулевые скорости всех точек. Общую задачу о рав-

новесии механической системы обычно разделяют на ряд частных задач.

Условие равновесия твердого тела, имеющего ось вращения, может быть сформулировано в виде правила моментов: тело находится в равновесии, если сумма моментов всех приложенных к телу сил относительно оси вращения равна нулю. Если твердое тело может перемещаться поступательно, а также совершать вращательное движение, равновесие тела достигается при одновременном выполнении двух условий: 1) сумма всех сил, приложенных к телу, равна нулю; 2) сумма моментов всех сил, приложенных к телу, относительно любой оси равна нулю.

В задаче о равновесии тел важную роль играет понятие центра тяжести. Всякое тело, находящееся в гравитационном поле, можно представить в виде системы частиц, на каждую из которых действует сила тяжести, пропорциональная ее массе. Полная сила тяжести, действующая на тело, является равнодействующей всех этих сил. Вблизи поверхности Земли, где гравитационное поле можно считать однородным, элементарные силы тяжести, действующие на частицы, параллельны. Точка приложения равнодействующей всех элементарных сил тяжести называется центром тяжести тела. Относительно оси, проходящей через центр тяжести тела, сумма моментов всех элементарных сил тяжести равна нулю.

Положение центра тяжести тела в выбранной системе координат определяется следующей формулой:

$$\mathbf{r}_c = \frac{1}{m} \int_V \rho \mathbf{r} dV, \quad (12.1)$$

где m – масса тела, ρ – плотность, $\mathbf{r}$ – радиус-вектор элемента объема тела. Интегрирование в (12.1) ведется по объему тела V . Центр тяжести тела совпадает с его центром масс (см. §8).

Для нахождения положений равновесия произвольной механической системы необходимо, вообще говоря, найти такие ее конфигурации, в которых сумма всех сил (как заданных сил, так и реакций связей), действующих на каждую точку системы, обращается в нуль. Эта сложная задача значительно упрощается для голономных систем, подчиненных идеальным стационарным связям. Необходимым и достаточным условием равновесия

таких систем является равенство нулю работы всех заданных (активных) сил $\mathbf{F}_l$ на любых виртуальных перемещениях точек системы:

$$\delta A = \sum_{l=1}^N \mathbf{F}_l \delta \mathbf{r}_l = 0, \quad (12.2)$$

где N – число точек системы. Переходя в (12.2) к обобщенным координатам q_j (см. §11), получаем

$$\delta A = \sum_{j=1}^s Q_j \delta q_j = 0, \quad (12.3)$$

где s – число степеней свободы системы, Q_j – обобщенная сила (11.7), соответствующая j -ой обобщенной координате. Поскольку вариации обобщенных координат δq_j независимы, то условие $\delta A = 0$ может выполняться только при одновременном выполнении равенств $Q_1 = 0, Q_2 = 0, \dots, Q_s = 0$. Таким образом, в положении равновесия голономной стационарной системы, подчиненной идеальным связям, все обобщенные силы обращаются в нуль.

Если силы, действующие на систему, потенциальны, то

$$Q_j = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_j}, \quad j = 1, 2, \dots, s, \quad (12.4)$$

где $\Pi = \Pi(q_1, q_2, \dots, q_s)$ – потенциальная энергия системы, выраженная через обобщенные координаты. В положении равновесия

$$\left(\frac{\partial \Pi}{\partial q_j} \right)_0 = 0, \quad j = 1, 2, \dots, s, \quad (12.5)$$

т.е. при равновесии потенциальная энергия системы имеет экстремум по всем обобщенным координатам.

На практике большую роль играет качественная характеристика

равновесия, называемая устойчивостью. В связи с этим различают три типа равновесия тел: устойчивое, неустойчивое и безразличное. Равновесие называется устойчивым, если движение, полученное в результате небольшого возмущения, не выходит за пределы небольшой окрестности первоначальной конфигурации системы. Если же при бесконечно малом возмущении система начинает удаляться от первоначальной конфигурации, то равновесие называется неустойчивым. Равновесие системы называется безразличным, если существует область отклонений от положения равновесия, в которой смещение любого тела системы не вызывает появления сил, изменяющих состояние системы.

О характере равновесия голономной системы, подчиненной стационарным идеальным связям, можно судить по зависимости потенциальной энергии от обобщенных координат. Если в состоянии равновесия потенциальная энергия имеет изолированный минимум:

$$\left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_j^2} \right)_0 > 0, \quad j = 1, 2, \dots, s, \quad (12.6)$$

то это состояние является устойчивым. Наоборот, если потенциальная энергия в состоянии равновесия имеет максимум:

$$\left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_j^2} \right)_0 < 0, \quad j = 1, 2, \dots, s, \quad (12.7)$$

то равновесие неустойчиво.

Примеры решения задач

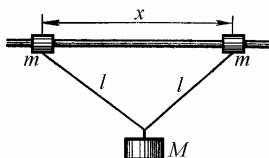


Рис. 12.1

Пример 12.1. Груз массой M подвешен на нитях длиной l , концы которых прикреплены к двум муфтам массами m , надетыми на стержень (рис. 12.1). Коэффициент трения между муфтами и стержнем равен μ . При каких расстояниях x ме-

жду муфтами система будет находиться в равновесии?

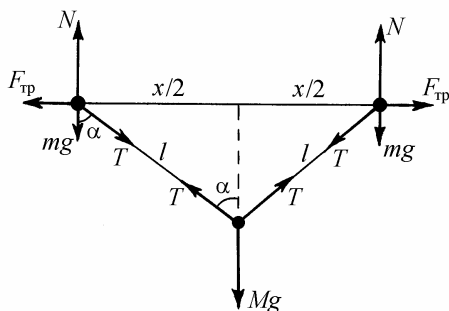


Рис. 12.2

Решение. Силы, действующие на тела системы, изображены на рис. 12.2. Из условий равновесия каждой из муфт вытекают следующие равенства:

$$N = mg + T \cos \alpha, \quad F_{\text{тр}} = T \sin \alpha.$$

Поскольку при увеличении x сила трения покоя возрастает, наибольшее из возможных при равновесии значений x соответствует максимальной величине силы трения покоя

$$F_{\text{тр}} = \mu N.$$

Условие равновесия груза имеет вид:

$$2T \cos \alpha = Mg.$$

Объединяя записанные выражения, получаем, что при равновесии системы справедливо равенство:

$$\tan \alpha = \mu \left(1 + 2 \frac{m}{M} \right).$$

С другой стороны,

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{x}{\sqrt{4l^2 - x^2}}, \text{ откуда } x = \frac{2l}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}.$$

Ответ: $x \leq \frac{2\mu l(M + 2m)}{\sqrt{M^2 + [\mu(M + 2m)]^2}}.$

Пример 12.2. Из проволоки сделана рамка в форме прямоугольного треугольника с острым углом α (рис. 12.3). По проволоке без трения могут скользить два шарика массами m и $3m$, связанные невесомой нерастяжимой нитью. Определить натяжение нити T и угол φ , образуемый нитью с одной из сторон треугольника в положении равновесия. Является ли это равновесие устойчивым?

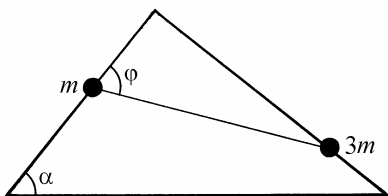


Рис. 12.3

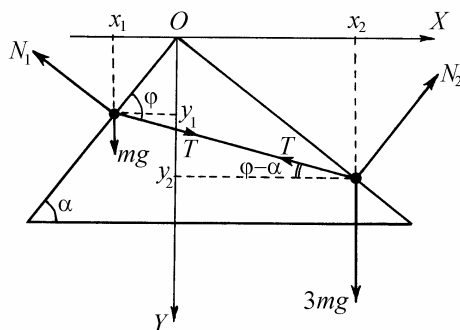


Рис. 12.4

Решение. Силы, действующие на шарики, изображены на рис. 12.4. В проекциях на горизонтальное и вертикальное направления уравнения равновесия шариков имеют вид:

$$N_1 \sin \alpha = T \cos(\varphi - \alpha), \quad N_2 \cos \alpha = T \cos(\varphi - \alpha),$$

$$N_1 \cos \alpha = mg + T \sin(\varphi - \alpha), \quad N_2 \sin \alpha = 3mg - T \sin(\varphi - \alpha).$$

Исключая из этих уравнений N_1 , N_2 и φ , находим силу натяжения нити в положении равновесия:

$$T = mg\sqrt{1 + 8\cos^2 \alpha}.$$

Для нахождения угла φ , соответствующего положению равновесия шариков, воспользуемся методами аналитической механики. Выбрав φ в качестве обобщенной координаты, выразим через нее декартовы координаты шариков. Из рис. 12.4 видно, что

$$x_1 = l \cos \alpha \cos \varphi, \quad x_2 = l \sin \alpha \sin \varphi, \quad y_1 = l \sin \alpha \cos \varphi, \quad y_2 = l \cos \alpha \sin \varphi,$$

где l — длина нити. Потенциальная энергия шариков, выраженная через обобщенную координату φ , имеет вид:

$$\Pi = -mgy_1 - 3mgy_2 = -mgl(\sin \alpha \cos \varphi + 3 \cos \alpha \sin \varphi).$$

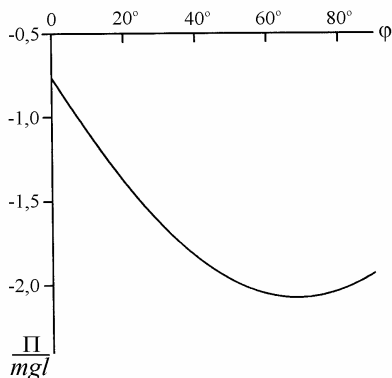


Рис. 12.5

График зависимости $\Pi = \Pi(\varphi)$ при $\alpha = 50^\circ$ изображен в качестве иллюст-

рации на рис. 12.5. Из условия равновесия

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} = mgl(\sin \alpha \sin \varphi - 3 \cos \alpha \cos \varphi) = 0$$

следует, что искомая величина φ удовлетворяет соотношению

$$\operatorname{tg} \varphi = 3 \operatorname{ctg} \alpha .$$

Поскольку в положении равновесия потенциальная энергия достигает минимума (см. рис. 12.5), это равновесие является устойчивым. Убедиться в этом можно также, находя вторую производную

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varphi^2} = mgl(\sin \alpha \cos \varphi + 3 \cos \alpha \sin \varphi)$$

и подставляя в получившееся выражение значение φ из (12.17). После несложных преобразований находим, что в положении равновесия

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varphi^2} = mgl\sqrt{\sin^2 \alpha + 9 \cos^2 \alpha} > 0 .$$

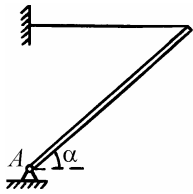


Рис. 12.6

Пример 12.3. Тонкий однородный стержень укреплен на шарнире в точке A и удерживается горизонтальной нитью (рис. 12.6). Масса стержня m , угол его наклона к горизонту α . Найти величину силы реакции шарнира R .

Решение: Стержень находится в равновесии под действием сил, изображенных на рис. 12.7, где T – величина силы натяжения нити, R_x и R_y – величины составляющих силы реакции шарнира вдоль горизонтальной и вертикальной осей, соответственно. Условия равновесия стержня имеют вид:

$$R_x = T, \quad R_y = mg, \quad mg \frac{l}{2} \cos \alpha - T l \sin \alpha = 0.$$

Объединяя записанные равенства и учитывая, что

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}, \text{ получаем ответ:}$$

$$R = mg \sqrt{1 + \frac{1}{4} \operatorname{ctg}^2 \alpha}.$$

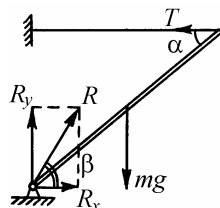


Рис. 12.7

Замечание. При решении подобных задач часто ошибочно полагают, что сила реакции обязательно направлена вдоль стержня. Элементарный анализ показывает, что угол β , который составляет сила реакции шарнира с горизонталью (рис. 12.7), удовлетворяет соотношению:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{R_y}{R_x} = 2 \operatorname{tg} \alpha.$$

Пример 12.4. У стены стоит лестница. Коэффициент трения лестницы о стену равен $\mu_1 = 0,4$, коэффициент трения лестницы о землю равен $\mu_2 = 0,5$. Центр тяжести лестницы находится в ее середине. а) Определить наименьший угол φ , который лестница может образовать с горизонталью, не падая. б) Пусть лестница поставлена в таком положении, что малейшее уменьшение угла φ должно привести к ее падению. Упадет ли лестница, если человек встанет на ее нижнюю ступеньку? на ее верхнюю ступеньку?

Решение. а) Силы, действующие на лестницу в положении равновесия, изображены на рис. 12.8. Наименьший угол φ соответствует случаю, когда величины сил трения покоя F_1 и F_2 достигают максимальных значений: $F_1 = \mu_1 N_1$, $F_2 = \mu_2 N_2$. Из условий равновесия следуют равенства:

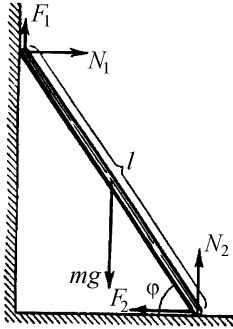


Рис. 12.8

$$\mu_1 N_1 + N_2 - mg = 0, \quad \mu_2 N_2 - N_1 = 0,$$

$$N_1 l \sin \varphi - mg \frac{l}{2} \cos \varphi + \mu_1 N_1 l \cos \varphi = 0.$$

$$\text{Отсюда } \operatorname{tg} \varphi = \frac{1 - \mu_1 \mu_2}{2 \mu_2} = 0,8; \quad \varphi = 38^\circ 40'.$$

б). Когда человек встанет на нижнюю ступеньку лестницы, центр тяжести системы "лестница – человек" сместится ближе к нижнему концу лестницы. Обозначив это смещение через x , найдем новое условие равновесия:

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{1}{\mu_2 l} \left[\left(\frac{l}{2} - x \right) - \mu_1 \mu_2 \left(\frac{l}{2} + x \right) \right].$$

Видно, что $\varphi_1 < \varphi$. Следовательно, если человек встанет на нижнюю ступеньку, то лестница не упадет. Она упадет, когда x поменяет знак, т.е. когда человек перейдет через середину лестницы.

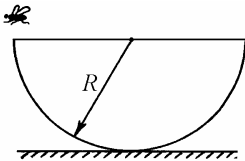


Рис. 12.9

Пример 12.5. Тонкостенная полусфера массой M и радиусом R покоится на горизонтальном столе (рис. 12.9). На какую высоту h опустится край полусферы, если на него сядет муха массой m ?

Решение. Для анализа равновесия системы необходимо найти положение центра тяжести полусферы. Введем сферическую систему координат (рис. 12.10). Учитывая осевую симметрию рассматриваемого тела, разобьем полусферу на тонкие кольца шириной $R d\vartheta$. Площадь кольца, определяемого углом ϑ , равна

$$dS = 2\pi R^2 \sin \vartheta d\vartheta,$$

а его масса

$$dM = \frac{M}{2\pi R^2} dS = M \sin \vartheta d\vartheta .$$

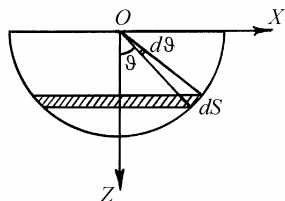


Рис. 12.10

Центр тяжести полусферы находится на ее оси симметрии (оси OZ). Координата центра тяжести вычисляется по формуле

$$z_c = \frac{1}{M} \int_0^{\pi/2} R \cos \vartheta dM = R \int_0^{\pi/2} \sin \vartheta \cos \vartheta d\vartheta = \frac{R}{2} .$$

Таким образом, центр тяжести полусферы располагается на расстоянии $a = R/2$ от ее центра.

Под действием веса мухи полусфера займет наклонное положение, изображенное на рис. 12.11, где через N обозначена сила реакции стола. Уравнение моментов, записанное относительно оси, перпендикулярной плоскости рисунка и проходящей через точку касания полусферы и стола имеет вид:

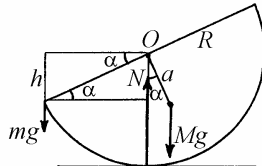


Рис. 12.11

$$Mg a \sin \alpha = mg R \cos \alpha .$$

где α – угол, на который отклонится полусфера. Отсюда

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{mR}{Ma} = 2 \frac{m}{M} .$$

Из рисунка видно, что искомая величина $h = R \sin \alpha$. Ответ:

$$h = \frac{R \operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} = \frac{R}{\sqrt{1 + (M / (2m))^2}} .$$

Задание для самостоятельной работы

12.6. Стол снабжен выдвижающимся ящиком, размеры которого указаны на рис. 12.12. Коэффициент трения между трущимися поверхностями ящика и пазов равен μ . На каких расстояниях x от края ящика нужно прикладывать к нему силу F , чтобы его выдвинуть?

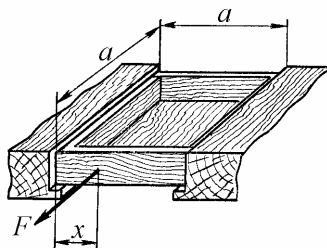


Рис. 12.12

12.7. В цилиндрическом желобе радиусом $7R$ лежат три одинаковых бревна радиусом R (рис. 12.13). Трение о желоб велико. При каком минимальном коэффициенте трения между бревнами они не раскатятся? Определите также коэффициент трения, при котором бревна не раскатятся в случае, когда радиус желоба бесконечно велик (горизонтальная плоская опора).

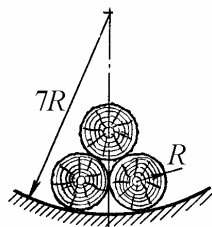


Рис. 12.13

12.8. Однородная проволока согнута под углом α и подвешена на легкой нити так, как это показано на рис. 12.14. Какой угол φ с горизонталью составляет нижняя часть проволоки?

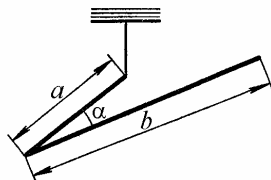


Рис. 12.14

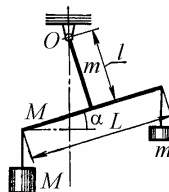


Рис. 12.14

12.9. Два однородных стержня массами m и M и длиной соответственно l и L жестко скреплены под прямым углом друг с другом и подвешены в точке

О (рис. 12.15). На какой угол α отклонится горизонтальный стержень, если к его концам подвесить грузы массами m и M ?

12.10. На внутренней поверхности гладкой сферы лежит невесомый стержень с маленькими шариками массами m_1 и m_2 на концах (рис. 12.16). Длина стержня равна радиусу сферы. Пренебрегая трением найти угол α , который составляет стержень с горизонталью.

12.11. Лестница стоит на шероховатом полу и опирается о выступ, снабженный роликом (рис. 12.17). Расстояние AB от нижнего конца лестницы до выступа составляет $3/4$ ее полной длины, угол наклона лестницы $\alpha = 45^\circ$. Каков должен быть коэффициент трения μ между лестницей и полом, чтобы она находилась в равновесии? Трением в ролике пренебречь.

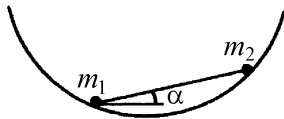


Рис. 12.16

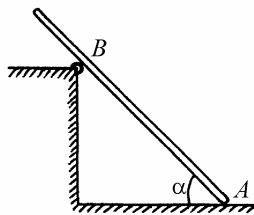


Рис. 12.17

12.12. Два шарика, соединенные невесомым жестким стержнем, подвешены на невесомых нитях одинаковой длины, закрепленных в одной и той же точке (рис. 12.18). Найти отношение масс шариков $k = m_1 / m_2$, если известно, что нить, на которой висит первый из них, отклонена от вертикали на угол $\alpha = 30^\circ$, а нить, на которой висит второй, отклонена на угол $\beta = 45^\circ$.

12.13. Определить положение центра тяжести однородного диска радиусом R , из которого вырезано круглое отверстие радиусом r (рис. 12.19). Центр отверстия находится от центра диска на расстоянии $R/2$.

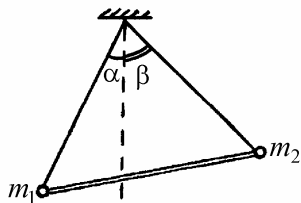


Рис. 12.18

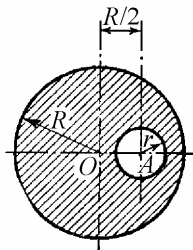


Рис. 12.19

12.14. Определить положение центра тяжести половины круглого однородного диска радиусом R .

12.15. Определить положение центра тяжести однородной проволоки длиной l , изогнутой по дуге окружности радиусом R ; рассмотреть случаи:

$l = \frac{\pi R}{2}$ (четверть кольца), $l = \pi R$ (половина кольца).

§13. Малые колебания

Краткие теоретические сведения

Широко распространенным в природе типом движения механических систем являются малые колебания, совершаемые вблизи устойчивого положения равновесия.

Общий подход к решению задачи о малых колебаниях изложим вначале на примере голономной системы с одной степенью свободы. В этом случае потенциальная энергия зависит от одной обобщенной координаты: $\Pi = \Pi(q)$. Обозначив через q_0 значение координаты q в положении равновесия, имеем (см. §12)

$$\left. \frac{\partial \Pi}{\partial q} \right|_{q_0} = 0. \quad (13.1)$$

Рассмотрим малые отклонения системы от положения равновесия и введем новую обобщенную координату:

$$\eta = q - q_0. \quad (13.2)$$

Разлагая потенциальную энергию в ряд Тейлора вблизи положения равновесия, получаем:

$$\Pi(q) = \Pi(q_0) + \left. \frac{\partial \Pi}{\partial q} \right|_{q_0} \eta + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 \Pi}{\partial q^2} \right|_{q_0} \eta^2 + \dots. \quad (13.3)$$

Первое слагаемое в (13.3) можно отбросить как несущественное, поскольку потенциальная энергия всегда определяется с точностью до постоянной. Второе слагаемое в положении равновесия обращается в нуль. Вводя обозначение

$$\Pi_1 = \left. \frac{\partial^2 \Pi}{\partial q^2} \right|_{q_0}, \quad (13.4)$$

получим для потенциальной энергии вблизи положения равновесия следующее выражение

$$\Pi \approx \frac{1}{2} \Pi_1 \eta^2. \quad (13.5)$$

Кинетическая энергия системы всегда может быть представлена как

$$K = \frac{1}{2} f(q) \dot{\eta}^2. \quad (13.6)$$

Полагая $q = q_0$ и обозначая $f(q_0)$ через K_1 , выразим кинетическую энергию системы в виде

$$K \approx \frac{1}{2} K_1 \dot{\eta}^2. \quad (13.7)$$

Таким образом, вблизи положения равновесия лагранжиан системы может быть приближенно записан в следующей форме:

$$L \approx \frac{1}{2} (K_1 \dot{\eta}^2 - \Pi_1 \eta^2). \quad (13.8)$$

Заметим, что K_1 всегда положительно. Если положение равновесия устойчиво, то $\Pi_1 > 0$ (см. §12). Уравнение движения системы, совершающей свободные малые колебания, имеет вид:

$$\ddot{\eta} + \omega^2 \eta = 0, \quad (13.9)$$

где $\omega = \sqrt{\Pi_1 / K_1}$ – собственная частота. Общее решение уравнения (13.9) записывается следующим образом:

$$\eta(t) = A \cos(\omega t + \varphi), \quad (13.10)$$

где A – амплитуда, φ – начальная фаза колебаний. Используя начальные условия

$$\eta(0) = \eta_0, \quad \dot{\eta}(0) = v_0, \quad (13.11)$$

находим

$$A = \sqrt{\eta_0^2 + v_0^2 / \omega^2}, \quad \varphi = \arctg\left(-\frac{v_0}{\omega \eta_0}\right). \quad (13.12)$$

Перейдем теперь к анализу малых колебаний системы со многими степенями свободы. Устойчивому равновесию соответствует такое положение голономной системы, в котором ее потенциальная энергия $\Pi(q_1, \dots, q_s)$ имеет минимум по всем s обобщенным координатам. Обозначим через q_{j0} ($j = 1, 2, \dots, s$) значения обобщенных координат в положении равновесия. Тогда

$$\left. \frac{\partial \Pi}{\partial q_j} \right|_{q_{j0}} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, s. \quad (13.13)$$

Введем новые обобщенные координаты:

$$\eta_j = q_j - q_{j0}, \quad j = 1, 2, \dots, s. \quad (13.14)$$

Разложим потенциальную энергию системы в окрестности положения равновесия в ряд Тейлора:

$$\begin{aligned} \Pi(q_1, \dots, q_s) = & \Pi(q_{10}, \dots, q_{s0}) + \sum_{j=1}^s \frac{\partial \Pi}{\partial q_j} \bigg|_{q_{j0}} \eta_j + \\ & + \frac{1}{2} \sum_{p=1}^s \sum_{j=1}^s \frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_p \partial q_j} \bigg|_{q_{p0} q_{j0}} \eta_p \eta_j + \dots \end{aligned} \quad (13.15)$$

Отбрасывая в (13.15) несущественное первое слагаемое, учитывая (13.13) и вводя обозначения

$$\Pi_{pj} = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_p \partial q_j} \bigg|_{q_{p0} q_{j0}}, \quad (13.16)$$

выразим потенциальную энергию вблизи положения равновесия как квадратичную форму обобщенных координат с постоянными коэффициентами:

$$\Pi \approx \frac{1}{2} \sum_{p=1}^s \sum_{j=1}^s \Pi_{pj} \eta_p \eta_j. \quad (13.17)$$

Если положение равновесия устойчиво, то квадратичная форма (13.17) является положительно определенной.

Запишем кинетическую энергию системы, выразив ее через обобщенные координаты и обобщенные скорости:

$$K = \frac{1}{2} \sum_{p=1}^s \sum_{j=1}^s f_{pj}(q_1, \dots, q_s) \dot{\eta}_p \dot{\eta}_j. \quad (13.18)$$

Полагая $q_j = q_{j0}$ и обозначая $f_{pj}(q_{10}, \dots, q_{s0})$ через K_{pj} , представим кинетическую энергию систему в виде положительно определенной квадратичной формы обобщенных скоростей с постоянными коэффициентами:

$$K \approx \frac{1}{2} \sum_{p=1}^s \sum_{j=1}^s K_{pj} \dot{\eta}_p \dot{\eta}_j. \quad (13.19)$$

Таким образом, вблизи положения равновесия лагранжиан системы может быть приближенно записан в следующей форме:

$$L \approx \frac{1}{2} \sum_{p=1}^s \sum_{j=1}^s (K_{pj} \dot{\eta}_p \dot{\eta}_j - \Pi_{pj} \eta_p \eta_j). \quad (13.20)$$

Отсюда следует, что уравнения движения системы, совершающей свободные малые колебания, имеют вид:

$$\sum_{j=1}^s (K_{pj} \ddot{\eta}_j + \Pi_{pj} \eta_j) = 0, \quad p = 1, 2, \dots, s. \quad (13.21)$$

Таким образом, движение системы с идеальными голономными стационарными связями и s степенями свободы, подверженной действию консервативных сил, определяется s линейными однородными дифференциальными уравнениями второго порядка с постоянными действительными симметричными коэффициентами.

Общее решение системы дифференциальных уравнений (13.21) для каждой обобщенной координаты η_j ($j = 1, 2, \dots, s$) состоит из суммы s гармонических колебаний с частотами $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_s$, называемых собственными частотами:

$$\eta_j = \sum_{k=1}^s \alpha_{kj} A_k \cos(\omega_k t + \varphi_k), \quad j = 1, 2, \dots, s. \quad (13.22)$$

Для определения собственных частот системы нужно приравнять нулю детерминант

$$\begin{vmatrix} (-K_{11}\omega^2 + \Pi_{11}) & \cdots & (-K_{1s}\omega^2 + \Pi_{1s}) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ (-K_{s1}\omega^2 + \Pi_{s1}) & \cdots & (-K_{ss}\omega^2 + \Pi_{ss}) \end{vmatrix} = 0, \quad (13.23)$$

раскрывая который получают характеристическое уравнение s -й степени относительно ω^2 . Оно имеет $2s$ действительных корней $\pm \omega_k$, $k = 1, 2, \dots, s$.

Совокупность коэффициентов распределения амплитуд α_{kj} ($j = 1, 2, \dots, s$) для частоты ω_k называется формой собственного колебания на этой частоте. При каждом собственном колебании соотношение между значениями координат в один и тот же момент времени всегда остается неизменным. Это и означает, что каждое собственное колебание обладает присущей ему формой.

Коэффициенты α_{k1} ($k = 1, 2, \dots, s$) обычно полагают равными единице. Для определения коэффициентов α_{kj} ($j = 2, 3, \dots, s$) необходимо решить k систем, каждая из которых содержит $s-1$ неоднородных уравнений

$$\sum_{j=2}^s (\Pi_{pj} - \omega_k^2 K_{pj}) \alpha_{kj} = -(\Pi_{p1} - \omega_k^2 K_{p1}),$$

$$p = 2, 3, \dots, s, \quad k = 1, 2, \dots, s \quad (13.24)$$

Таким образом, в каждом частном движении на частоте ω_k произвольны две величины: A_k и φ_k ; остальные величины — ω_k и все α_{kj} ($j = 2, 3, \dots, s$, $\alpha_{k1} = 1$) — определяются только устройством системы. Константы A_k и φ_k ($k = 1, 2, \dots, s$), в свою очередь, не зависят от свойств системы, а определяются из начальных условий (начального смещения и начальной скорости).

Частные движения системы, при которых все координаты гармонически изменяются со временем на одной из собственных частот, называются нормальными колебаниями. Эти движения всегда можно возбудить пу-

тем специального выбора начальных условий. Например, если задать начальные значения координат в соответствии с j -й собственной формой, а начальные скорости положить равными нулю, то в системе возникнут нормальные (гармонические) колебания на j -й частоте. Во многих случаях такое выделение гармонических движений из собственных колебаний системы позволяет сразу определить собственную частоту.

Если мы зададим s гармонических колебаний

$$\xi_k = A_k \cos(\omega_k t + \varphi_k), \quad k = 1, 2, \dots, s, \quad (13.25)$$

сумма которых представляет собой движение первой координаты η_1 , то тем самым мы зададим движение всех остальных координат η_j ($j = 2, 3, \dots, s$). Следовательно, величины $\xi_1, \dots, \xi_s$, полностью определяющие движение всей системы, можно принять за новые обобщенные координаты. Они называются нормальными координатами.

Формулы преобразования от нормальных координат к обобщенным имеют вид:

$$\eta_j = \sum_{k=1}^s \alpha_{kj} \xi_k, \quad j = 1, 2, \dots, s. \quad (13.26)$$

В нормальных координатах

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2} (a_1 \dot{\xi}_1^2 + a_2 \dot{\xi}_2^2 + \dots + a_s \dot{\xi}_s^2), \\ \Pi &= \frac{1}{2} (a_1 \omega_1^2 \xi_1^2 + a_2 \omega_2^2 \xi_2^2 + \dots + a_s \omega_s^2 \xi_s^2). \end{aligned} \quad (13.27)$$

и уравнения Лагранжа распадаются на s независимых друг от друга уравнений:

$$\ddot{\xi}_k + \omega_k^2 \xi_k = 0, \quad k = 1, 2, \dots, s. \quad (13.28)$$

Каждая нормальная координата совершает гармоническое колебание с соответствующей ей собственной частотой. В отличие от нормальных каждая обобщенная координата совершает движение по сложному, вообще говоря неперiodическому закону. Но всегда можно указать такие линейные комбинации обобщенных координат, которые колеблются по чисто гармоническому закону на собственных частотах системы.

Примеры решения задач

Пример 13.1. Найти частоту колебаний системы, изображенной на рис. 13.1. Цилиндр радиусом R и массой m катится по шероховатой горизонтальной плоскости без проскальзывания. Жесткость невесомой пружины, прикрепленной к оси цилиндра, равна k . Движение происходит в плоскости рисунка.

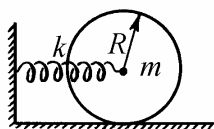


Рис. 13.1

Решение. Положение центра масс цилиндра описывается координатой x , связанной с углом поворота цилиндра φ соотношением

$$x = R\varphi.$$

Начало отсчета переменной x выберем в точке, где пружина недеформирована. Кинетическая энергия цилиндра

$$K = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{I\dot{\varphi}^2}{2} = \frac{3}{2}m\frac{\dot{x}^2}{2}.$$

Потенциальная энергия деформированной пружины

$$\Pi = \frac{kx^2}{2}.$$

Лагранжиан системы

$$L = \frac{3}{2} m \frac{\dot{x}^2}{2} - k \frac{x^2}{2}.$$

Уравнение движения цилиндра

$$\frac{3}{2} m \ddot{x} + kx = 0, \text{ или } \ddot{x} + \frac{2k}{3m} x = 0.$$

Множитель $\frac{2k}{3m}$, стоящий перед переменной x в уравнении движения, представляет собой квадрат собственной частоты. Следовательно,

$$\omega = \sqrt{\frac{2k}{3m}}.$$

Пример 13.2. Тонкую однородную палочку массой m и длиной L , подвешенную за концы на двух нитях длиной l , выводят из равновесия путем поворота вокруг центра масс на малый угол (рис. 13.2) и отпускают. Найти частоту малых колебаний палочки.

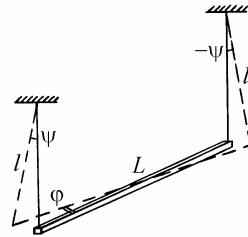


Рис. 13.2

Решение. При повороте палочки вокруг центра масс на угол φ обе нити отклонятся от вертикали в разные стороны на угол ψ , причем для малых φ и ψ выполняется соотношение

$$l\psi = \frac{L}{2} \varphi, \text{ или } \psi = \frac{L}{2l} \varphi.$$

Центр масс палочки поднимается при этом на высоту

$$\Delta x = l(1 - \cos \psi) \approx l \frac{\psi^2}{2} = \frac{L^2}{4l} \cdot \frac{\varphi^2}{2}.$$

Таким образом, потенциальная энергия системы, отсчитываемая от уровня, который занимает палочка в положении равновесия, равна

$$\Pi \approx \frac{mgL^2}{4l} \cdot \frac{\varphi^2}{2}.$$

Кинетическая энергия палочки складывается из энергии вращения вокруг вертикальной оси, проходящей через центр масс,

$$K_1 = \frac{I\dot{\varphi}^2}{2} = \frac{mL^2}{12} \cdot \frac{\dot{\varphi}^2}{2}$$

и энергии поступательного движения центра масс в вертикальном направлении

$$K_2 = \frac{m(\Delta\dot{x})^2}{2} \approx \frac{mL^4}{16l^2} (\varphi\dot{\varphi})^2.$$

Последнее выражение имеет более высокий порядок, чем второй, и при малых колебаниях может быть отброшено (в случае малых отклонений от устойчивого положения равновесия скорости точек системы также являются малыми, что непосредственно вытекает из закона сохранения энергии). Таким образом, лагранжиан системы можно приближенно записать в виде:

$$L \approx \frac{mL^2}{12} \cdot \frac{\dot{\varphi}^2}{2} - \frac{mgL^2}{4l} \cdot \frac{\varphi^2}{2}.$$

Из уравнения движения

$$\frac{mL^2}{12} \ddot{\varphi} + \frac{mgL^2}{4l} \varphi = 0, \text{ или } \ddot{\varphi} + \frac{3g}{l} \varphi = 0$$

находим собственную частоту:

$$\omega = \sqrt{\frac{3g}{l}}.$$

Пример 13.3. Найти частоту малых колебаний шарика массой m , надетого на гладкий горизонтальный стержень и прикрепленного к одному из концов пружины, другой конец которой закреплен на расстоянии l от стержня (рис 13.3). В положении равновесия шарика пружина растянута с силой F_0 .

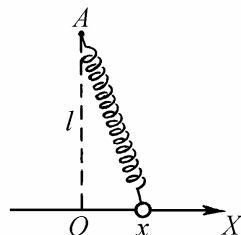


Рис. 13.3

Решение. При смещении шарика от положения равновесия на малое расстояние x удлинение пружины составит величину

$$\Delta l = \sqrt{l^2 + x^2} - l \approx l \left(1 + \frac{x^2}{2l^2} \right) - l = \frac{x^2}{2l}.$$

Сила упругости пружины

$$F = F_0 + k\Delta l = F_0 + k \frac{x^2}{2l}$$

при малых x является практически постоянной. Поэтому потенциальная энергия пружины с точностью до малых величин высшего порядка равна произведению силы F_0 на удлинение Δl :

$$\Pi \approx F_0 \Delta l \approx \frac{F_0}{l} \cdot \frac{x^2}{2}.$$

Лагранжиан системы

$$L \approx m \frac{\dot{x}^2}{2} - \frac{F_0}{l} \cdot \frac{x^2}{2}.$$

Уравнение малых колебаний

$$\ddot{x} + \frac{F_0}{ml} x = 0.$$

Следовательно,

$$\omega = \sqrt{\frac{F_0}{ml}}.$$

Замечание. Если длина недеформированной пружины равна l (в положении равновесия пружина не растянута), то первый не исчезающий член в потенциальной энергии имеет четвертый порядок:

$$\Pi \approx \frac{k}{l^2} \cdot \frac{x^4}{8}.$$

В этом случае малые колебания шарика около положения равновесия не будут гармоническими.

Пример 13.4. Найти собственные частоты и собственные формы малых колебаний системы, изображенной на рис. 13.4: два плоских математических маятника, представляющих собой маленькие шарики массой m каждый, подвешенные на невесомых жестких стержнях длиной $2l$, связаны посередине пружинной жесткостью k , длина которой в недеформированном состоянии равна расстоянию между точками подвеса маятников.

Решение. Вводим две обобщенные координаты – углы отклонения маятников β_1 и β_2 . Кинетическая энергия системы

$$K = 4ml^2 \left(\frac{\dot{\beta}_1^2}{2} + \frac{\dot{\beta}_2^2}{2} \right).$$

Потенциальную энергию запишем сразу для случая малых отклонений маятников от положения равновесия:

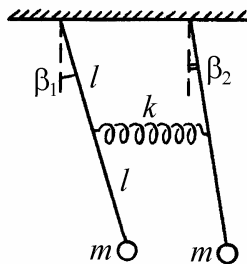


Рис. 13.4

$$\Pi \approx 2mgl \cdot \frac{\beta_1^2}{2} + 2mgl \cdot \frac{\beta_2^2}{2} + \frac{k(l\beta_1 - l\beta_2)^2}{2}.$$

Лагранжиан системы

$$L \approx 4ml^2 \frac{\dot{\beta}_1^2 + \dot{\beta}_2^2}{2} - 2mgl \frac{\beta_1^2 + \beta_2^2}{2} - kl^2 \frac{(\beta_1 - \beta_2)^2}{2}.$$

Уравнения Лагранжа

$$\begin{aligned} 4ml^2 \ddot{\beta}_1 + 2mgl\beta_1 + kl^2(\beta_1 - \beta_2) &= 0, \\ 4ml^2 \ddot{\beta}_2 + 2mgl\beta_2 + kl^2(\beta_2 - \beta_1) &= 0. \end{aligned} \quad (13.29)$$

Вводя обозначения $\gamma = \frac{g}{2l} + \frac{k}{4m}$, $\delta = \frac{k}{4m}$, представим эти уравнения в виде:

$$\begin{aligned} \ddot{\beta}_1 + \gamma\beta_1 - \delta\beta_2 &= 0, \\ \ddot{\beta}_2 - \delta\beta_1 + \gamma\beta_2 &= 0. \end{aligned} \quad (13.30)$$

Примем во внимание, что в общем случае малые колебания системы с двумя степенями свободы описываются уравнениями

$$\begin{aligned} K_{11}\ddot{\beta}_1 + K_{12}\ddot{\beta}_2 + \Pi_{11}\beta_1 + \Pi_{12}\beta_2 &= 0, \\ K_{21}\ddot{\beta}_1 + K_{22}\ddot{\beta}_2 + \Pi_{21}\beta_1 + \Pi_{22}\beta_2 &= 0. \end{aligned} \quad (13.31)$$

Сравнивая (13.30) и (13.31), находим, что

$$K_{11} = K_{22} = 1, \quad K_{12} = K_{21} = 0, \quad \Pi_{11} = \Pi_{22} = \gamma, \quad \Pi_{12} = \Pi_{21} = -\delta.$$

Общее решение системы (13.30) имеет вид:

$$\begin{aligned} \beta_1 &= D_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + D_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2), \\ \beta_2 &= \alpha_{12} D_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + \alpha_{22} D_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2), \end{aligned} \quad (13.32)$$

где ω_1, ω_2 – собственные частоты, α_{12}, α_{22} – коэффициенты распределения амплитуд. Для определения частот составим определитель

$$\begin{aligned} &\begin{vmatrix} (-K_{11}\omega^2 + \Pi_{11}) & (-K_{12}\omega^2 + \Pi_{12}) \\ (-K_{21}\omega^2 + \Pi_{21}) & (-K_{22}\omega^2 + \Pi_{22}) \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} (-\omega^2 + \gamma) & -\delta \\ -\delta & (-\omega^2 + \gamma) \end{vmatrix} = (-\omega^2 + \gamma)^2 - \delta^2 \end{aligned}$$

и запишем характеристическое уравнение:

$$\omega^4 - 2\gamma\omega^2 + \gamma^2 - \delta^2 = 0.$$

Отсюда

$$\omega_1^2 = \gamma - \delta = \frac{g}{2l}, \quad \omega_2^2 = \gamma + \delta = \frac{g}{2l} + \frac{k}{2m}. \quad (13.33)$$

Чтобы найти коэффициенты α_{12} , α_{22} , образуем систему уравнений

$$\begin{cases} (\Pi_{22} - \omega_1^2 K_{22})\alpha_{12} = -(\Pi_{21} - \omega_1^2 K_{21}), \\ (\Pi_{22} - \omega_2^2 K_{22})\alpha_{22} = -(\Pi_{21} - \omega_2^2 K_{21}), \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} (\gamma - \omega_1^2)\alpha_{12} = \delta, \\ (\gamma - \omega_2^2)\alpha_{22} = \delta. \end{cases}$$

Отсюда находим

$$\alpha_{12} = \frac{\delta}{\gamma - \omega_1^2} = 1, \quad \alpha_{22} = \frac{\delta}{\gamma - \omega_2^2} = -1.$$

Таким образом, собственные формы колебаний имеют вид:

$$\text{на частоте } \omega_1: \alpha_{11} = 1, \alpha_{12} = 1; \text{ на частоте } \omega_2: \alpha_{21} = 1, \alpha_{22} = -1.$$

Следовательно, для возбуждения нормальных колебаний на первой частоте нужно отклонить маятники в одну сторону на одинаковые углы и отпустить; при этом маятники будут колебаться в фазе без деформации пружины. Нормальные колебания на второй частоте возникнут при отклонении маятников на один и тот же угол, но в разные стороны. Движение маятников будет происходить в противофазе с периодическим сжатием и растяжением пружины.

Вводя нормальные координаты

$$\xi_1 = D_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1), \quad \xi_2 = D_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2),$$

можно записать закон изменения во времени обобщенных координат β_1 , β_2 в виде:

$$\beta_1 = \xi_1 + \xi_2, \quad \beta_2 = \xi_1 - \xi_2. \quad (13.34)$$

Видно, что при задании произвольных начальных условий движение каждой из обобщенных координат не носит характер гармонических колебаний,

а представляет собой наложение колебаний на частотах ω_1 и ω_2 . Но, разрешив систему (13.34) относительно нормальных координат ξ_1, ξ_2 , легко установить, что полусумма и полуразность углов β_1 и β_2 всегда совершает гармонические колебания на частотах ω_1 и ω_2 соответственно, поскольку

$$\xi_1 = \frac{\beta_1 + \beta_2}{2}, \quad \xi_2 = \frac{\beta_1 - \beta_2}{2}.$$

Замечание. Анализ системы (13.29) позволяет найти собственные частоты и нормальные колебания, не прибегая к общей теории. В самом деле, складывая уравнения (13.29) получаем:

$$8ml^2(\ddot{\beta}_1 + \ddot{\beta}_2) + 4mgl(\beta_1 + \beta_2) = 0.$$

Обозначая $(\beta_1 + \beta_2)/2$ через ξ_1 , приходим к уравнению:

$$\ddot{\xi}_1 + \frac{g}{2l}\xi_1 = 0,$$

откуда $\omega_1^2 = g/(2l)$ (ср. с (13.33)). Вычитая из верхнего уравнения (13.29) нижнее и обозначая $\xi_2 = (\beta_1 - \beta_2)/2$, получаем

$$\ddot{\xi}_2 + \left(\frac{g}{2l} + \frac{k}{2m}\right)\xi_2 = 0,$$

откуда $\omega_2^2 = g/(2l) + k/(2m)$, что также совпадает с (13.33). Введение линейных комбинаций обобщенных координат β_1 и β_2 , для которых справедливы уравнения гармонических колебаний, позволяет в данном случае существенно упростить решение задачи.

Пример 13.5. Найти собственные частоты и собственные формы малых колебаний системы, представляющей собой двойной плоский маятник (рис. 13.5). Длина и масса каждого из маятников равны l и m соответственно.

Решение. В качестве обобщенных координат возьмем углы β_1 и β_2 . Выразим через них декартовы координаты первой и второй материальных точек:

$$x_1 = l \cos \beta_1, \quad y_1 = l \sin \beta_1,$$

$$x_2 = l \cos \beta_1 + l \cos \beta_2, \quad y_2 = l \sin \beta_1 + l \sin \beta_2.$$

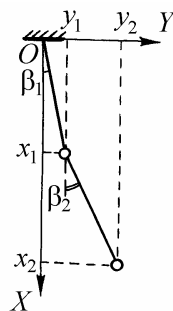


Рис. 13.5

Кинетическая энергия двойного маятника

$$\begin{aligned} K &= m \frac{\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2}{2} + m \frac{\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2}{2} = \\ &= ml^2 \left(\dot{\beta}_1^2 + \frac{\dot{\beta}_2^2}{2} + \dot{\beta}_1 \dot{\beta}_2 (\sin \beta_1 \sin \beta_2 + \cos \beta_1 \cos \beta_2) \right) = \\ &= ml^2 \left(\dot{\beta}_1^2 + \frac{\dot{\beta}_2^2}{2} + \dot{\beta}_1 \dot{\beta}_2 \cos(\beta_1 - \beta_2) \right). \end{aligned}$$

Потенциальная энергия

$$\Pi = mg(l - x_1) + mg(2l - x_2) = mgl(1 - \cos \beta_1) + mgl(2 - \cos \beta_1 - \cos \beta_2).$$

Лагранжиан системы при произвольных отклонениях маятников:

$$\begin{aligned} L &= ml^2 \left(\dot{\beta}_1^2 + \frac{\dot{\beta}_2^2}{2} + \dot{\beta}_1 \dot{\beta}_2 \cos(\beta_1 - \beta_2) \right) - \\ &- 2mgl(1 - \cos \beta_1) - mgl(1 - \cos \beta_2). \end{aligned} \quad (13.35)$$

Разлагая лагранжиан в ряд Тейлора вблизи положения равновесия и оставляя нулевой член разложения в выражении для кинетической энергии и второй член в выражении для потенциальной энергии, получаем:

$$L \approx ml^2 \left(\dot{\beta}_1^2 + \frac{\dot{\beta}_2^2}{2} + \dot{\beta}_1 \dot{\beta}_2 \right) - mgl \left(\beta_1^2 + \frac{\beta_2^2}{2} \right).$$

Записываем уравнения Лагранжа:

$$\begin{aligned} 2\ddot{\beta}_1 + \ddot{\beta}_2 + 2\omega_0^2 \beta_1 &= 0, \\ \ddot{\beta}_1 + \ddot{\beta}_2 + \omega_0^2 \beta_2 &= 0, \end{aligned} \quad (13.36)$$

в которых использовано обозначение $\omega_0^2 = g/l$. Сравнивая (13.36) с (13.31), находим, что

$$K_{11} = 2, \quad K_{22} = 1, \quad K_{12} = K_{21} = 1, \quad \Pi_{11} = 2\omega_0^2, \quad \Pi_{22} = \omega_0^2, \quad \Pi_{12} = \Pi_{21} = 0.$$

Составляем детерминант и записываем характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} (-2\omega^2 + 2\omega_0^2) & -\omega^2 \\ -\omega^2 & (-\omega^2 + \omega_0^2) \end{vmatrix} = 2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 - \omega^4 = 0.$$

Отсюда находим

$$\omega_1^2 = \omega_0^2(2 - \sqrt{2}), \quad \omega_2^2 = \omega_0^2(2 + \sqrt{2}).$$

Для определения коэффициентов распределения амплитуд образуем систему уравнений:

$$\begin{cases} (\Pi_{22} - \omega_1^2 K_{22})\alpha_{12} = -(\Pi_{21} - \omega_1^2 K_{21}), \\ (\Pi_{22} - \omega_2^2 K_{22})\alpha_{22} = -(\Pi_{21} - \omega_2^2 K_{21}), \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} (\omega_0^2 - \omega_1^2)\alpha_{12} = \omega_1^2, \\ (\omega_0^2 - \omega_2^2)\alpha_{22} = \omega_2^2. \end{cases}$$

Отсюда

$$\alpha_{12} = \frac{\omega_1^2}{\omega_0^2 - \omega_1^2} = \sqrt{2}, \quad \alpha_{22} = \frac{\omega_2^2}{\omega_0^2 - \omega_2^2} = -\sqrt{2}.$$

Следовательно, собственные формы колебаний имеют вид:

$$\text{на частоте } \omega_1: \alpha_{11} = 1, \alpha_{12} = \sqrt{2}; \text{ на частоте } \omega_2: \alpha_{21} = 1, \alpha_{22} = -\sqrt{2}.$$

Вводя нормальные координаты

$$\xi_1 = D_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1), \quad \xi_2 = D_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2),$$

записываем общее решение системы (13.36):

$$\beta_1 = \xi_1 + \xi_2, \quad \beta_2 = \sqrt{2}\xi_1 - \sqrt{2}\xi_2.$$

Для того, чтобы осуществить нормальное колебание на частоте ω_1 , нужно отклонить маятники в одну сторону на углы β_0 (верхний) и $\sqrt{2}\beta_0$ (нижний) и отпустить без начальной скорости. Движение маятников будет происходить в фазе. Второе нормальное колебание осуществляется, если отклонить маятники на те же углы, но в разные стороны. При этом маятники будут колебаться в противофазе на частоте ω_2 .

Выразим нормальные координаты через обобщенные:

$$\xi_1 = \frac{1}{2} \left(\beta_1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \beta_2 \right), \quad \xi_2 = \frac{1}{2} \left(\beta_1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \beta_2 \right).$$

В итоге находим такие линейные комбинации углов β_1 и β_2 , которые при произвольных малых начальных отклонениях системы изменяются во времени по гармоническим законам на частотах ω_1 и ω_2 .

Задание для самостоятельной работы

13.6. Найти частоту малых колебаний в системе, изображенной на рис. 13.6: однородный цилиндр радиусом r катается без проскальзывания по внутренней стороне цилиндрической поверхности радиусом R .

13.7. Каркас из однородной тонкой проволоки, состоящий из дуги полуокружности и диаметра D , подвешен в точке O (рис. 13.7). Какова частота малых колебаний каркаса в плоскости рисунка?

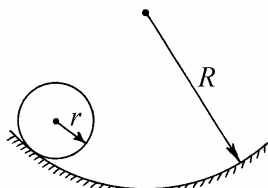


Рис. 13.6

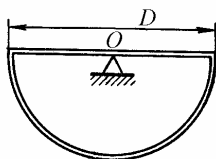


Рис. 13.7

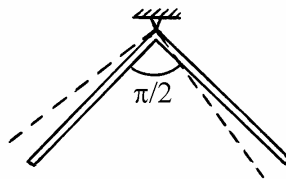


Рис. 13.8

13.8. Найти частоту малых колебаний плоского маятника, представляющего собой однородный стержень длиной $2l$, изогнутый посередине под прямым углом и шарнирно подвешенный за вершину угла (рис. 13.8).

13.9. Груз массой m , лежащий на гладкой доске массой M , прикреплен к находящимся на ее концах опорам посредством двух пружин жесткостями k_1 и k_2 (рис. 13.9). В положении равновесия груза обе пружины недеформированы. Удерживая доску, груз отводят от положения равновесия, а затем всю систему предоставляют самой себе. Пренебрегая трением между доской и столом, определите частоту возникших при этом малых колебаний доски и груза.

13.10. На гладком горизонтальном столе между двумя одинаковыми закрепленными пружинами находится небольшой шарик (рис. 13.10). Длина каждой из пружин в свободном состоянии $l_0 < l$ (в положении равновесия

шарика пружины растянуты). Шарик смещают от положения равновесия на небольшое расстояние один раз вдоль оси OX , второй – вдоль оси OY , а затем отпускают. Чему равно отношение частот малых колебаний вдоль этих осей?

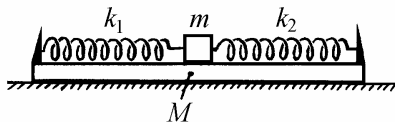


Рис. 13.9

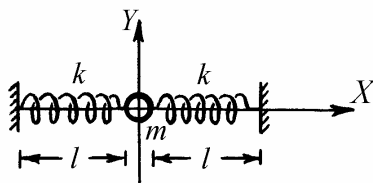


Рис. 13.10

13.11. Найти частоту малых колебаний системы, изображенной на рис. 13.11. Блок, состоящий из жестко скрепленных шкивов радиусами R и r , имеет массу m и момент инерции I . На шкивы намотаны в противоположных направлениях нити, причем конец одной из них привязан к опоре непосредственно, а конец второй – через пружину жесткостью k . Система совершает вертикальные движения в плоскости рисунка.

13.12. Найти частоту малых колебаний системы, изображенной на рис. 13.12: тонкий стержень массой m и длиной l подвешен за один из концов и подкреплён в середине двумя пружинами жесткостью k . Движение происходит в плоскости рисунка, в положении равновесия стержня пружины не напряжены.

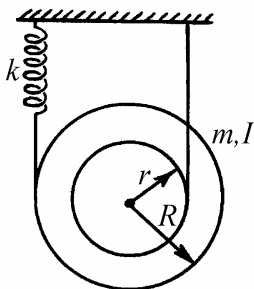


Рис. 13.11

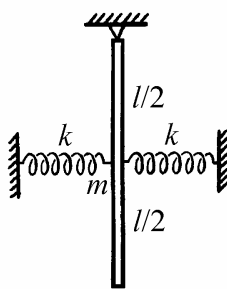


Рис. 13.12

13.13. Однородный стержень положили на два быстро вращающихся ролика, как показано на рис. 13.13. Расстояние между осями роликов l , коэффициент трения скольжения между стержнем и блоками μ . Показать, что предоставленный самому себе стержень будет совершать гармонические колебания и найти их частоту.



Рис. 13.13

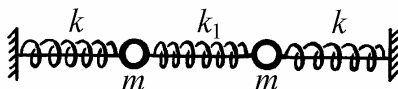


Рис. 13.14

13.14. Найти собственные частоты и собственные формы малых колебаний системы, изображенной на рис. 13.14. Два шарика одинаковой массой m надеты на гладкий горизонтальный стержень и соединены друг с другом пружиной жесткостью k_1 и с неподвижными опорами пружинами жесткостью k . В положении равновесия пружины не напряжены.

13.15. Плоский математический маятник массой m и длиной l , подвешен к шарiku массой M , который надет на гладкий горизонтальный стержень и соединен с неподвижной опорой пружиной жесткостью k (рис. 13.15). Выбрав в качестве обобщенных координат смещение x шарика M от положения равновесия и угол φ отклонения маятника от вертикали, найти собственные частоты малых колебаний этой системы. Для случая $M = m$, $k = mg/l$ найти собственные формы малых колебаний.

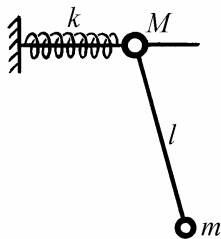


Рис. 13.15

§14. Механика жидкостей и газов

Краткие теоретические сведения

В механике жидкостей и газов изучаются равновесие и движение жидкостей и газов, а также их взаимодействие с твердыми телами. В частности, в гидроаэростатике рассматриваются условия и закономерности равновесия жидкостей и газов под воздействием приложенных к ним сил, а также условия равновесия твердых тел, находящихся в жидкостях или газах.

Любой выделенный объем жидкости (газа) находится в равновесии, если силы со стороны соседних слоев жидкости (газа) или твердых тел действуют лишь перпендикулярно элементарным поверхностям, ограничивающим этот объем. Существование касательных составляющих поверхностных сил при равновесии невозможно, так как из-за текучести любая сколь угодно малая касательная сила вызывает деформацию сдвига жидкости (газа), т.е. нарушает равновесие. Поэтому при описании взаимодействия элементов жидкости (газа) между собой и с другими телами рассматривают лишь нормальные компоненты поверхностных сил.

Давлением называют скалярную величину, равную отношению величины dF_n нормальной компоненты поверхностной силы, действующей на элементарную площадку, к площади этой площадки dS :

$$p = \frac{dF_n}{dS} . \quad (14.1)$$

Если сила давления $\mathbf{F}$ равномерно распределена по поверхности площадью S , то давление равно

$$p = \frac{F_n}{S} . \quad (14.2)$$

Согласно закону Паскаля, давление, оказываемое на покоящуюся жидкость внешними силами, передается ею без изменения одинаково во всех направлениях. То же самое утверждение справедливо и для газа. Давление на элементарную площадку, помещенную в покоящуюся жидкость или газ, одинаково при любой ориентации площадки.

Следствием закона Паскаля является уравнение, описывающее распределение давления внутри покоящейся несжимаемой жидкости, находящейся в поле тяготения. Для давления жидкости на глубине h справедливо следующее выражение:

$$p(h) = \rho gh, \quad (14.3)$$

где ρ – плотность жидкости, которая вследствие ее несжимаемости одинакова на любой глубине, g – ускорение свободного падения. Давление, определяемое формулой (14.3), называется гидростатическим. Это давление создает жидкость, находящаяся в равновесии под действием силы тяжести.

Поскольку давление верхних слоев жидкости на нижележащие слои передается ими одинаково по всем направлениям, приложенное к поверхности жидкости внешнее давление p_0 увеличивает давление в каждой точке жидкости на одну и ту же величину. В этом случае

$$p(h) = p_0 + \rho gh. \quad (14.4)$$

Таким образом, сила тяжести и внешнее давление на поверхности жидкости создают внутри покоящейся жидкости давление, которое, согласно закону Паскаля, передается на и дно, и на стенки сосуда. По третьему закону Ньютона дно и стенки сосуда оказывают на жидкость такое же по величине давление.

Зависимость давления в жидкости или газе от глубины приводит к возникновению выталкивающей силы, действующей на тело, окруженное со всех сторон жидкостью или газом. Выталкивающая (архимедова) сила представляет собой результирующую элементарных сил давления, действующих на поверхность тела со стороны окружающей жидкости (газа). В

соответствии с законом Архимеда, выталкивающая сила направлена вертикально вверх; ее величина равна весу жидкости (газа) в объеме погруженной части тела, а точка приложения совпадает с центром тяжести объема вытесненной телом жидкости (газа).

Раздел физики, занимающийся изучением законов движения жидкостей и газов называется гидроаэродинамикой. Если жидкость (газ) находится в движении, то наряду с нормальными составляющими поверхностных сил, действующих на выделенный объем, в жидкости (газе) могут возникать касательные силы. Эти силы определяются не самими деформациями сдвига, а их производными по времени. Поэтому касательные силы в движущейся жидкости (газе) относятся к классу сил трения, или вязкости. Их называют вязкими силами.

Жидкость, в которой при любых движениях не возникают силы вязкости, называется идеальной. Для установившегося движения идеальной несжимаемой жидкости справедливо уравнение Бернулли:

$$p + \frac{\rho v^2}{2} + \rho gh = \text{const} . \quad (14.5)$$

Здесь v – скорость движения жидкости в данном сечении трубы, h – высота данного сечения трубы над некоторым уровнем. Из уравнения Бернулли следует, что скорость вытекания жидкости из малого отверстия в боковой стенке или дне широкого сосуда равна

$$v = \sqrt{2gh} , \quad (14.6)$$

где h – высота поверхности жидкости над отверстием. Равенство (14.6) часто называют формулой Торричелли.

Для несжимаемой жидкости, протекающей по трубе переменного сечения, справедливо соотношение

$$S_1 v_1 = S_2 v_2 , \quad (14.7)$$

являющееся следствием уравнения неразрывности. Здесь v_1 и v_2 – скорости жидкости в двух сечениях трубы площадью поперечного сечения S_1 и S_2 .

Вязкость, которой обладают реальные жидкости, приводит к возникновению касательных сил трения. Эти силы действуют как между слоями самой жидкости (внутреннее трение), так и между жидкостью и поверхностью находящегося в ней тела (внешнее трение). Внутреннее трение характеризуется коэффициентом динамической вязкости η , имеющим разные значения для различных жидкостей. Физический смысл коэффициента вязкости заключается в том, что он численно равен импульсу, который переносится в единицу времени (1 с) через площадку в 1 м^2 при градиенте скорости жидкости в направлении, перпендикулярном площадке, равном единице (1 м/с на 1 м длины). Для подавляющего большинства жидкостей значения динамической вязкости известны и приведены в справочной литературе.

Наличие вязкости приводит к тому, что течение жидкости по горизонтальной трубе постоянного сечения возможно лишь при наличии перепада давления на входе и выходе трубы. Этот перепад давления необходим для поддержания стационарного течения, чтобы уравновешивать силы трения.

Наиболее простым и хорошо изученным течением вязкой жидкости является ламинарное течение, при котором отдельные слои жидкости или газа скользят друг относительно друга, не перемешиваясь. При ламинарном движении объем жидкости (газа), протекающей за время t через капиллярную трубку радиусом r и длиной l , определяется формулой Пуазейля

$$V = \frac{\pi r^4 t \Delta p}{8 l \eta}, \quad (14.8)$$

где Δp – разность давлений на концах трубки.

Сила сопротивления, которую испытывает движущийся в вязкой жидкости (или в газе) шарик, определяется формулой Стокса

$$F = 6\pi\eta r v, \quad (14.9)$$

где r – радиус шарика, v – его скорость. Закон Стокса справедлив только для ламинарного обтекания шарика жидкостью.

Примеры решения задач

Пример 14.1. В сосуде, вертикальное сечение которого изображено на рис. 14.1, находятся в равновесии два невесомых поршня, соединенные невесомой нерастяжимой нитью. Пространство между поршнями заполнено жидкостью, плотность которой $\rho = 10^3 \text{ кг/м}^3$. Найти силу натяжения нити T , если площади поршней $S_1 = 0,1 \text{ м}^2$ и $S_2 = 0,05 \text{ м}^2$, а длина нити $l = 0,5 \text{ м}$. Трением поршней о стенки сосуда пренебречь, ускорение свободного падения принять $g = 10 \text{ м/с}^2$.

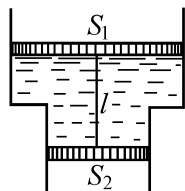


Рис. 14.1

Решение: Поршни находятся в равновесии под действием сил, величины и направления которых указаны на рис. 14.2. Для облегчения анализа рисунка точки приложения некоторых сил условно смещены от их истинного положения. На самом деле точки приложения всех сил расположены на оси симметрии системы.

Будем использовать следующие обозначения: T – величина силы натяжения нити, которая в силу невесомости нити одинакова во всех ее точках, p_0 – атмосферное давление, p – давление жидкости на уровне верхнего поршня. Поршни находятся в равновесии при выполнении условий:

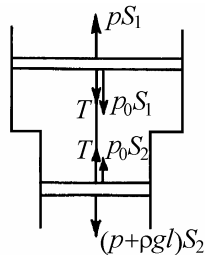


Рис. 14.2

$$p_0 S_1 + T = p S_1 \quad \text{для верхнего поршня,}$$

$$(p + \rho g l) S_2 = p_0 S_2 + T \quad \text{для нижнего поршня.}$$

Из первого уравнения получаем, что $T = (p - p_0) S_1$. Отсюда видно, что

ответ зависит от разности $p - p_0$. Сложение первого и второго уравнений дает: $(p - p_0)(S_1 - S_2) = \rho g l S_2$. Используя это выражение, находим ответ:

$$T = \frac{\rho g l S_1 S_2}{S_1 - S_2} = 500 \text{ Н.}$$

Пример 14.2. Металлический брусок в форме прямоугольного параллелепипеда со сторонами a , b и l лежит на наклонной

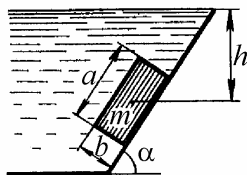


Рис. 14.3

стенке резервуара с водой (рис. 14.3). Масса бруска m , коэффициент трения между стенкой и бруском μ . Какую силу F нужно приложить к бруску вдоль наклонной стенки, чтобы сдвинуть его с места вниз? Вода под брусок не подтекает, атмосферное давление p_0 , необходимые размеры указаны на рисунке.

Решение. Силы, действующие на брусок, изображены на рис. 14.4, где введены следующие обозначения: F_1 , F_3 и F_2 – силы

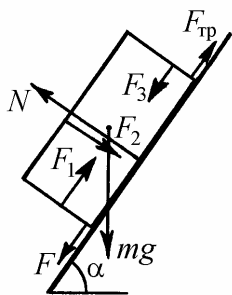


Рис. 14.4

давления воды на боковые и верхнюю грани бруска, mg – сила тяжести, $F_{\text{тр}}$ – сила трения бруска о стенку резервуара, N – нормальная составляющая реакции стенки. Поскольку вода под брусок не подтекает, сила давления воды на нижнюю грань бруска равна нулю. Условия равновесия бруска в проекциях на наклонную стенку и нормаль к ней имеют вид:

$$F - F_{\text{тр}} - F_1 + F_3 + mg \sin \alpha = 0, \quad N - F_2 - mg \cos \alpha = 0. \quad (14.10)$$

Будем искать такое значение силы $F = F_0$, при котором брусок постоит, но сила трения покоя достигает своего максимального значения

$(F_{\text{тр}})_{\text{max}} = \mu N$. Условию задачи очевидно будут удовлетворять все значения $F > F_0$. Из системы (14.10) получаем:

$$F_0 = F_1 - F_3 + \mu F_2 + mg(\mu \cos \alpha - \sin \alpha) \quad (14.11)$$

Для вычисления сил давления воды на грани бруска воспользуемся координатными системами O_1Y_1 , O_2X_2 и O_3Y_3 , изображенными на рис. 14.5. Из рисунка видно, что начало O_1 координатной оси O_1Y_1 находится на глубине $h + h_1$, начало O_2 координатной оси O_2X_2 – на глубине $h + h_2$, начало O_3 координатной оси O_3Y_3 – на глубине $h - h_3$. В выбранных координатах си-

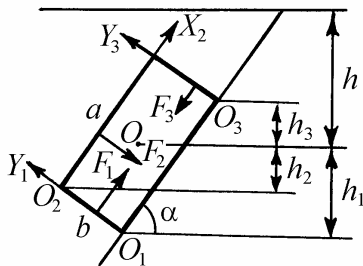


Рис. 14.5

лы давления воды на грани бруска выражаются следующим образом:

$$\begin{aligned} F_1 &= \int_0^b \left[\rho g (h + h_1 - y_1 \cos \alpha) + p_0 \right] l dy_1, \\ F_2 &= \int_0^a \left[\rho g (h + h_2 - x_2 \sin \alpha) + p_0 \right] l dx_2, \\ F_3 &= \int_0^b \left[\rho g (h - h_3 - y_3 \cos \alpha) + p_0 \right] l dy_3. \end{aligned} \quad (14.12)$$

Выполняя в (14.12) интегрирование и учитывая, что

$$h_1 = \frac{a}{2} \sin \alpha + \frac{b}{2} \cos \alpha, \quad h_2 = h_3 = \frac{a}{2} \sin \alpha - \frac{b}{2} \cos \alpha,$$

получаем:

$$F_1 = \left[\rho g \left(h + \frac{a}{2} \sin \alpha \right) + p_0 \right] bl, \quad F_2 = \left[\rho g \left(h - \frac{b}{2} \cos \alpha \right) + p_0 \right] al,$$

$$F_3 = \left[\rho g \left(h - \frac{a}{2} \sin \alpha \right) + p_0 \right] bl.$$

Подстановка найденных сил давления в (14.11) приводит к ответу:

$$F > F_0 = \mu al(\rho gh + p_0) + \rho gabl \left(\sin \alpha - \frac{\mu}{2} \cos \alpha \right) + mg(\mu \cos \alpha - \sin \alpha).$$

Замечание 1. Как легко видеть, результирующая сил давления воды направлена наклонно вниз. Из-за того, что вода под брусок не подтекает, действующая на него со стороны воды сила прижимает брусок к стенке. Если брусок был бы окружен водой со всех сторон, на его нижнюю грань действовала бы сила

$$F_4 = \left[\rho g \left(h + \frac{b}{2} \cos \alpha \right) + p_0 \right] al.$$

(На рис. 14.5 эта сила не показана). Читателю предлагается самостоятельно убедиться в том, что в этом случае результирующая сил давления, т.е. векторная сумма

$$\mathbf{F}_\Sigma = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 + \mathbf{F}_4$$

направлена вертикально вверх и по величине равна $F_\Sigma = \rho gabl$ (закон Архимеда).

Замечание 2. Если толщина пластинки пренебрежимо мала ($b \rightarrow 0$), ответ принимает вид

$$F > \mu al(\rho gh + p_0) + mg(\mu \cos \alpha - \sin \alpha).$$

Для невесомой тонкой пластинки ($b \rightarrow 0$, $m \rightarrow 0$) ответ наиболее прост:

$$F > \mu a l (\rho g h + p_0).$$

Пример 14.3. Сопло фонтана, дающего вертикальную струю высотой $H = 8$ м, имеет форму усеченного конуса, сужающегося кверху (рис. 14.6). Диаметр нижнего сечения сопла $D = 5$ см, диаметр верхнего $d = 1$ см. Высота сопла $h = 0,5$ м. Определите расход воды μ , подаваемой фонтаном. На какую величину Δp давление в нижнем сечении сопла больше атмосферного? Сопротивлением воздуха в струе пренебречь.

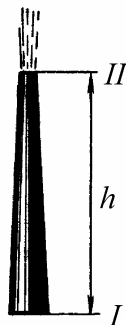


Рис. 14.6

Решение. В потоке жидкости в сопле выделим два горизонтальных сечения: нижнее (I) и верхнее (II) (рис. 14.6). Расход воды μ равен объему жидкости, протекающей за единицу времени через любое сечение сопла. Скорость воды, протекающей через сечение II, легко найти по высоте подъема воды в поле силы тяжести:

$$v_2 = \sqrt{2gH}.$$

Тогда

$$\mu = v_2 S_2 = \sqrt{2gH} \frac{\pi d^2}{4} = 9,8 \cdot 10^{-4} \text{ м}^3/\text{с}.$$

Запишем уравнение Бернулли для потока жидкости в сопле фонтана между сечениями I и II:

$$\rho g h + \frac{\rho v_2^2}{2} + p_A = \frac{\rho v_1^2}{2} + p_1,$$

где p_A – атмосферное давление. Из последнего уравнения находим избыточное давление

$$\Delta p = p_1 - p_A = \rho gh + \frac{\rho}{2}(v_2^2 - v_1^2).$$

Для определения скорости воды в сечении I воспользуемся уравнением неразрывности струи:

$$v_1 S_1 = v_2 S_2.$$

Объединяя записанные равенства, получаем ответ:

$$\Delta p = \rho gh + \rho g H \left(1 - \frac{d^4}{D^4} \right) \approx 8,33 \cdot 10^4 \text{ Па}.$$

Пример 14.4. В дне цилиндрического сосуда диаметром $D = 0,5$ м имеется круглое отверстие диаметром $d = 1$ см. Найти зависимость скорости v понижения уровня воды в сосуде от высоты h этого уровня. Вычислить значение v для высоты $h = 0,2$ м.

Решение. Пусть S_1 – площадь поперечного сечения сосуда, v_1 – скорость течения воды в нем (скорость понижения воды в сосуде), S_2 – площадь поперечного сечения отверстия, v_2 – скорость вытекания воды из отверстия. В соответствии с уравнением Бернулли

$$\frac{\rho v_1^2}{2} + \rho gh = \frac{\rho v_2^2}{2},$$

или

$$v_1^2 + 2gh = v_2^2.$$

В силу уравнения неразрывности $v_1 S_1 = v_2 S_2$, или

$$v_2 = \frac{v_1 S_1}{S_2}$$

Объединяя записанные выражения, находим, что

$$v_1 = \frac{S_2 \sqrt{2gh}}{\sqrt{S_1^2 - S_2^2}} = \frac{d^2 \sqrt{2gh}}{\sqrt{D^4 - d^4}}.$$

Поскольку по условию $d^4 \ll D^4$, то приближенно

$$v = v_1 \approx \frac{d^2}{D^2} \sqrt{2gh}.$$

При $h = 0,2$ м $v = 8 \cdot 10^{-4}$ м/с.

Пример 14.5. В боковую поверхность цилиндрического сосуда радиусом $R = 2$ см вставлен горизонтальный капилляр радиусом $r = 1$ мм и длиной $l = 2$ см. В сосуд налито касторовое масло, динамическая вязкость которого $\eta = 12$ г/(см·с). Найти зависимость скорости v понижения уровня касторового масла в цилиндрическом сосуде от высоты h этого уровня над капилляром. Вычислить значение v при $h = 26$ см.

Решение. Скорость понижения уровня касторового масла в сосуде зависит от скорости протекания масла через капилляр. Объем масла, протекающего за время t через капилляр, определяется формулой Пуазейля

$$V = \frac{\pi r^4 t \Delta p}{8l\eta}.$$

В рассматриваемой задаче разность давлений на концах капилляра обусловлена гидростатическим давлением слоя масла в сосуде, т.е.

$$\Delta p = \rho g h .$$

С другой стороны,

$$V = S_1 v_1 t = \pi r^2 v_1 t ,$$

где v_1 – скорость протекания масла через капилляр. Из этих равенств находим

$$v_1 = \frac{r^2 \rho g h}{8 \eta l} .$$

Но так как $v_1 S_1 = v S$, где v – скорость понижения уровня масла в сосуде и S – площадь поперечного сечения сосуда, то, окончательно

$$v = \frac{r^4 \rho g h}{8 \eta R^2} .$$

При $h = 26$ см $v = 3 \cdot 10^{-5}$ м/с.

Задание для самостоятельной работы

14.6. Два вертикальных сообщающихся цилиндра заполнены водой и закрыты поршнями с массами $M_1 = 1$ кг и $M_2 = 2$ кг (рис. 14.7). В положении равновесия левый поршень расположен выше правого на величину $h = 10$ см.

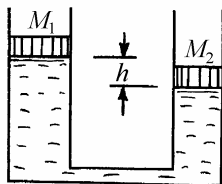


Рис. 14.7

Когда на левый поршень поместили гирию массой $m = 2$ кг, поршни в положении равновесия оказались на одной высоте. Какова будет разность высот поршней H в положении равновесия, если гирию перенести на правый поршень?

перенести на правый поршень?

14.7. Тело, состоящее из куска льда и вмержшего в него алюминиевого бруска, плавает в воде так, что под водой находится $\alpha = 95\%$ объема тела (рис. 14.8). Какой процент льда β должен растаять, чтобы тело полностью погрузилось в воду? Плотность воды $\rho_v = 10^3 \text{ кг/м}^3$, плотность льда $\rho_l = 0,9 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$, плотность алюминия $\rho_a = 2,7 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$.



Рис. 14.8

14.8. Колокол, представляющий собой полусферу радиусом R , стоит на гладком горизонтальном столе (рис. 14.9). В колокол впаяна тонкая трубка. До какого уровня, отсчитываемого от стола, можно налить в трубку воду, чтобы она не вытекала из-под колокола? Масса колокола с трубкой равна m , плотность воды ρ .

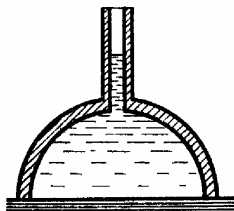


Рис. 14.9

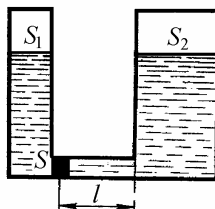


Рис. 14.10

14.9. Какую работу нужно совершить, чтобы медленно переместить поршень площадью S на расстояние l в трубе, соединяющей два резервуара, заполненные водой до одного уровня (рис. 14.10)? Площади поперечного сечения резервуаров равны S_1 и S_2 . Плотность воды ρ . Трением пренебречь.

14.10. Цилиндрический сосуд высотой $h = 1 \text{ м}$ до краев заполнен водой. За какое время вся вода выльется через отверстие, расположенное на дне сосуда, если площадь поперечного сечения отверстия в $n = 400$ раз меньше площади поперечного сечения сосуда?

14.11. На гладком горизонтальном столе стоит цилиндрический сосуд с водой, высота уровня которой равна H . На какой высоте h от стола нужно проделать в боковой стенке сосуда маленькое отверстие, чтобы струя из

него падала на поверхность стола наиболее далеко от сосуда?

14.12. Вертикальный цилиндрический сосуд с водой вращается вокруг своей оси с постоянной угловой скоростью ω . Найти:

- форму свободной поверхности воды;
- распределение давления воды на дне сосуда вдоль радиуса, если давление воды в центре дна равно p_0 . Плотность воды ρ .

14.13. Смесь свинцовых дробинок диаметром $d_1 = 1$ мм и $d_2 = 3$ мм опустили в сосуд с глицерином глубиной $h = 1$ м. На какое время τ дробинок меньшего диаметра достигнут дна сосуда позже, чем дробинок большего диаметра? Динамическая вязкость глицерина $\eta = 13,9$ г/(см·с), плотность глицерина $\rho_{\text{гл}} = 1,2$ г/см³, плотность свинца $\rho_{\text{св}} = 11,3$ г/см³.

14.14. На рис. 14.11 представлена схема водомера. По горизонтальной трубе переменного сечения течет вода. Сечения горизонтальной трубы у основания водометрических трубок равны S_1 (слева) и S_2 (справа). Найти объем воды Q , протекающей в единицу времени через сечение трубы, если разность уровней воды в манометрических трубках равна Δh .

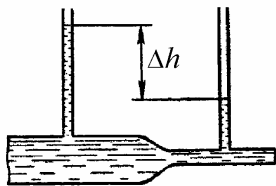


Рис. 14.11

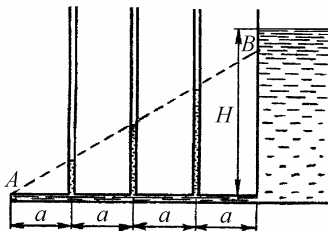


Рис. 14.12

14.15. На рис. 14.12 изображена установка, демонстрирующая течение вязкой жидкости по горизонтальной трубе. Манометрические трубки впаяны в трубу на равных расстояниях $a = 10$ см. Высота уровня жидкости в широком сосуде $H = 26$ см. Прямая AB , проведенная через уровни жидкости в манометрических трубках, образует с горизонталью угол $\alpha = 30^\circ$. Определить скорость вытекания жидкости.

§15. Статистическая механика

Краткие теоретические сведения

Важной задачей физики является изучение строения и свойств вещества. С точки зрения статистической механики вещество представляет собой совокупность большого числа движущихся и взаимодействующих частиц – атомов или молекул. Удобный способ описания таких систем основан на применении вероятностных представлений. Сформулируем кратко основные понятия теории вероятностей.

15.1 Случайные величины и вероятность

Случайное событие – это событие, наблюдение которого можно многократно повторить (например, бросание монеты или игрального кубика), но исход которого нельзя предсказать заранее.

Вероятность случайного события $P(A)$ – это отношение числа N_A появлений события A в серии испытаний к полному числу испытаний N в пределе, когда число испытаний стремится к бесконечности:

$$P(A) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N_A}{N}. \quad (15.1)$$

Как видно из определения, $0 \leq P \leq 1$.

Аксиома сложения вероятностей. Вероятность наступления одного из случайных взаимоисключающих событий равна сумме их вероятностей:

$$P(A + B) = P(A) + P(B). \quad (15.2)$$

Аксиома умножения вероятностей. Вероятность совместного наступления нескольких независимых случайных событий равна произведению их вероятностей:

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B). \quad (15.3)$$

Случайная величина – это величина, измерение которой можно многократно повторить, но значение которой нельзя предсказать заранее.

Различают дискретные и непрерывные случайные величины. Дискретная случайная величина – это величина, принимающая конечное или бесконечное, но счетное множество значений. Все эти значения можно перенумеровать:

$$x_1, x_2, \dots, x_n, \dots \quad (15.4)$$

Обозначим через $p_n = P(x = x_n)$ вероятность того, что $x = x_n$. Набор чисел

$$p_1, p_2, \dots, p_n, \dots \quad (15.5)$$

вполне характеризует данную дискретную случайную величину и называется распределением вероятности. Распределение вероятности подчиняется условию нормировки

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_n = 1, \quad (15.6)$$

которое является следствием аксиомы сложения вероятностей.

Если распределение вероятности известно, то среднее значение $\langle f(x) \rangle$ произвольной функции $f(x)$ случайной величины x можно вычислить по формуле

$$\langle f(x) \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} f(x_n) p_n. \quad (15.7)$$

Наиболее важными характеристиками случайной величины являются среднее значение (математическое ожидание)

$$\langle x \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x_n p_n \quad (15.8)$$

и дисперсия, определяемая как средний квадрат отклонения случайной величины от ее среднего значения:

$$\sigma_x^2 = \langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle. \quad (15.9)$$

Дисперсия дискретной случайной величины вычисляется по формуле

$$\sigma_x^2 = \sum_{n=1}^{\infty} (x_n - \langle x \rangle)^2 p_n. \quad (15.10)$$

Нетрудно показать, что в общем случае

$$\sigma_x^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2, \quad (15.11)$$

где

$$\langle x^2 \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 p_n \quad (15.12)$$

– среднее значение квадрата случайной величины.

Мерой отклонения случайной величины от ее среднего значения является величина, равная квадратному корню из дисперсии

$$\sigma_x = \sqrt{\sigma_x^2} \quad (15.13)$$

и называемая среднеквадратичным (стандартным) отклонением. Безразмерная величина

$$\delta x = \frac{\sigma_x}{\langle x \rangle} \quad (15.14)$$

называется относительной флуктуацией случайной величины x .

Распределение Пуассона. Многие дискретные случайные величины подчиняются следующему распределению вероятности, называемому распределением Пуассона:

$$p_n = e^{-\alpha} \frac{\alpha^n}{n!}. \quad (15.15)$$

Здесь n – случайная величина, которая может принимать целочисленные значения $0, 1, 2, \dots$, p_n – вероятность того, что значение случайной величины равно n , величина $\alpha = \text{const}$ – параметр распределения. Среднее значение пуассоновской случайной величины

$$\langle n \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} n p_n = \alpha. \quad (15.16)$$

Таким образом, единственный параметр распределения Пуассона α имеет смысл среднего значения самой случайной величины. Нетрудно показать, что дисперсия пуассоновской случайной величины σ_n^2 также равна α , а относительная флуктуация $\delta n = 1/\sqrt{\alpha}$ или

$$\delta n = \frac{1}{\sqrt{\langle n \rangle}}. \quad (15.17)$$

Непрерывная случайная величина – это величина, принимающая бесконечное и несчетное множество значений из некоторого интервала.

Удобной для физики характеристикой непрерывной случайной величины является плотность вероятности.

Плотность вероятности – это отношение вероятности попадания случайной величины в малый интервал вблизи заданного значения к величине интервала в пределе, когда интервал стремится к нулю:

$$w(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{P(x_0 \leq x \leq x_0 + \Delta x)}{\Delta x}. \quad (15.18)$$

Функция $w(x)$ имеет размерность, обратную размерности случайной величины x , подчиняется условию нормировки

$$\int_{-\infty}^{\infty} w(x) dx = 1 \quad (15.19)$$

и позволяет вычислить среднее значение произвольной функции случайной величины:

$$\langle f(x) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) w(x) dx. \quad (15.20)$$

В частности, среднее значение (математическое ожидание) самой случайной величины

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x w(x) dx. \quad (15.21)$$

Дисперсия случайной величины

$$\sigma_x^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \langle x \rangle)^2 w(x) dx = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2. \quad (15.22)$$

Среднеквадратичное отклонение и относительная флуктуация непрерывной случайной величины могут быть вычислены по формулам (15.13), (15.14).

Распределение Гаусса. Многие непрерывные случайные величины имеют следующее распределение плотности вероятности, называемое нормальным распределением, или распределением Гаусса:

$$w(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(x - \langle x \rangle)^2}{2\sigma^2}\right\}. \quad (15.23)$$

Здесь случайная величина x может принимать любые вещественные значения ($-\infty < x < \infty$). Распределение (15.23) подчиняется условию нормировки (15.19).

Важным свойством гауссовых случайных величин является сохранение статистики при линейных преобразованиях. Так, сумма или разность независимых гауссовых случайных величин являются гауссовыми величинами.

Многомерное распределение плотности вероятности – это отношение вероятности попадания нескольких случайных величин в малые интервалы вблизи заданных значений к произведению величин интервалов в пределе, когда интервалы стремятся к нулю. Например, в случае двух случайных величин x, y

$$w(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x, \Delta y \rightarrow 0} \frac{P(x_0 \leq x \leq x_0 + \Delta x, y_0 \leq y \leq y_0 + \Delta y)}{\Delta x \Delta y}. \quad (15.24)$$

Размерность этой функции обратна размерности произведения случайных величин x и y . Условие нормировки имеет вид:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} w(x, y) dx dy = 1. \quad (15.25)$$

Правило вычисления средних записывается следующим образом:

$$\langle f(x, y) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) w(x, y) dx dy. \quad (15.26)$$

Для многомерных плотностей вероятности справедливы правила понижения порядка распределения:

$$w_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} w(x, y) dy, \quad w_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} w(x, y) dx. \quad (15.27)$$

Многомерное (в частном случае двумерное) распределение плотности вероятности независимых случайных величин распадается на произведение одномерных распределений:

$$w(x, y) = w_1(x) \cdot w_2(y). \quad (15.28)$$

Из формул (15.26), (15.28) следует, что среднее значение произведения независимых случайных величин равно произведению их средних значений:

$$\langle x \cdot y \rangle = \langle x \rangle \cdot \langle y \rangle.$$

Замена переменной в распределении плотности вероятности. Пусть есть случайная величина x с известным распределением плотности вероятности $w_1(x)$ и другая случайная величина y , связанная с величиной x известным функциональным соотношением: $y = y(x)$. Тогда распределение плотности вероятности для величины y можно вычислить по формуле

$$w_2(y) = w_1(x(y)) \cdot \left| \frac{dx(y)}{dy} \right|. \quad (15.29)$$

Здесь $x = x(y)$ – функция, обратная функции $y = y(x)$. В случае двумерно-

го распределения

$$w_2(u, v) = w_1(x(u, v), y(u, v)) \cdot \left| \frac{D(x(u, v), y(u, v))}{D(u, v)} \right|. \quad (15.30)$$

Здесь x, y исходные случайные переменные, для которых известно распределение плотности вероятности $w_1(x, y)$. Величины u, v – новые случайные переменные, связанные с величинами x, y известными функциональными соотношениями $u = u(x, y), v = v(x, y)$. Функция $w_2(u, v)$ представляет собой распределение плотности вероятности для величин u, v . Второй множитель в правой части формулы (15.30) – это якобиан преобразования от переменных x, y к переменным u, v :

$$\left| \frac{D(x, y)}{D(u, v)} \right| = \frac{\partial x}{\partial u} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \cdot \frac{\partial y}{\partial u}.$$

Аналогичным образом выполняется замена и для большего числа переменных.

15.2. Распределение Гиббса

Рассмотрим некоторую систему, находящуюся в состоянии термодинамического равновесия. Так называется состояние, в которое самопроизвольно переходит система, предоставленная самой себе в условиях изоляции от окружающей среды. В состоянии термодинамического равновесия система может находиться сколь угодно долго, причем ее параметры не изменяются со временем.

Основной закон статистической механики равновесных систем утверждает, что при термодинамическом равновесии распределение плотности вероятности для различных состояний системы определяется следующей формулой, называемой распределением Гиббса:

$$w(z) = C \cdot \exp \left\{ -\frac{H(z)}{kT} \right\}. \quad (15.31)$$

Здесь C – нормировочная постоянная; через z обозначена совокупность канонических переменных, т.е. набор обобщенных координат и импульсов системы:

$$z = \{q, p\} = \{q_1, q_2, \dots, q_s; p_1, p_2, \dots, p_s\},$$

где s – число степеней свободы системы,

$$H(z) = K + \Pi$$

– гамильтониан системы, K и Π – кинетическая и потенциальная энергии системы, T – абсолютная температура,

$$k = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ Дж/К}$$

– постоянная Больцмана.

С помощью распределения Гиббса можно вычислить, например, внутреннюю энергию u той или иной системы, которая в статистической механике определяется как среднее значение гамильтониана:

$$u = \langle H \rangle.$$

Отметим наиболее важные следствия распределения Гиббса.

Распределение молекул по скоростям. Распределение плотности вероятности для декартовых компонент скорости молекулы имеет вид

$$w(v_x, v_y, v_z) = C \cdot \exp \left\{ -\frac{m(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)}{2kT} \right\}. \quad (15.32)$$

Здесь C – нормировочная постоянная, m – масса молекулы, v_x, v_y, v_z – декартовы компоненты скорости молекулы, которая рассматривается как материальная точка. Величины v_x, v_y, v_z могут принимать любые вещественные значения. Распределение (15.32) называется распределением Максвелла.

Из формулы (15.32) видно, что трехмерное распределение плотности вероятности для декартовых компонент скорости молекулы распадается на произведение одномерных распределений:

$$w(v_x, v_y, v_z) = w_1(v_x) \cdot w_1(v_y) \cdot w_1(v_z),$$

где

$$w_1(v_x) = C_1 \cdot \exp\left(-\frac{mv_x^2}{2kT}\right) \quad (15.33)$$

– распределение плотности вероятности для величины v_x . Выражения для $w_1(v_y)$ и $w_1(v_z)$ имеют аналогичный вид. Это означает, что декартовы компоненты скорости молекулы представляют собой статистически независимые случайные величины. Сравнивая формулы (15.23) и (15.33), видим, что каждая из декартовых компонент скорости молекулы есть гауссова случайная величина с нулевым средним значением и дисперсией

$$\langle v_x^2 \rangle = \frac{kT}{m}. \quad (15.34)$$

Используя интеграл Пуассона

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2) dx = \sqrt{\pi},$$

и условие нормировки (15.19), нетрудно вычислить постоянную C_1 в формуле (15.33):

$$C_1 = \sqrt{m / 2\pi kT}. \quad (15.35)$$

Нормировочная постоянная C в формуле (15.32) связана с C_1 соотношением $C = C_1^3$. Следовательно,

$$C = (m / 2\pi kT)^{3/2}. \quad (15.36)$$

Распределение молекул во внешнем силовом поле. Распределение плотности вероятности для декартовых координат молекулы имеет вид

$$w(x, y, z) = C \cdot \exp\left\{-\frac{\Pi(x, y, z)}{kT}\right\}. \quad (15.37)$$

Здесь C – нормировочная постоянная, $\Pi(x, y, z)$ – потенциальная энергия молекулы. Распределение (15.37) называется распределением Больцмана.

Распределение энергии по степеням свободы. В состоянии термодинамического равновесия на каждую квадратичную степень свободы системы приходится в среднем одинаковая энергия, равная $kT/2$. Это утверждение называют теоремой о равномерном распределении энергии по степеням свободы. Квадратичной степенью свободы или квадратичной канонической переменной называют переменную, вклад которой в гамильтониан пропорционален квадрату этой переменной. Например, для свободной частицы массой m

$$H = \frac{1}{2m} (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2). \quad (15.38)$$

Здесь обобщенные импульсы p_x, p_y, p_z являются квадратичными перемен-

ными.

15.3. Диффузия и теплопроводность

Диффузией называют процесс проникновения одного вещества в другое. Например, капнув в воду каплю чернил или туши, мы можем наблюдать процесс постепенного окрашивания воды – диффузию. Изучение явления диффузии позволило сформулировать закон диффузии, согласно которому поток частиц пропорционален градиенту их концентрации. В простейшем случае, когда концентрация частиц n зависит только от одной декартовой координаты (например x), закон диффузии записывается в виде

$$j_x = -D \frac{\partial n}{\partial x}. \quad (15.39)$$

Здесь

$$j_x = \frac{1}{S} \cdot \frac{\Delta N_x}{\Delta t} \quad (15.40)$$

– величина, называемая потоком частиц, ΔN_x – число частиц, пересекающих площадку площадью S в направлении оси OX за время Δt . При этом предполагается, что площадка перпендикулярна оси OX . Знак “минус” в правой части формулы (15.39) указывает на то, что поток частиц идет в направлении убывания их концентрации. Постоянная величина D в формуле (15.39) называется коэффициентом диффузии.

Изменение концентрации частиц во времени и в пространстве описывается уравнением диффузии, которое имеет вид

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D \cdot \frac{\partial^2 n}{\partial x^2}. \quad (15.41)$$

Это уравнение есть следствие закона диффузии и уравнения непрерывности, выражающего сохранение числа частиц:

$$\frac{\partial n}{\partial t} = -\frac{\partial j_x}{\partial x}. \quad (15.42)$$

Теплопроводностью называют процесс переноса тепла в неоднородно нагретом теле. Изучение этого явления позволило сформулировать закон теплопроводности, согласно которому поток тепла пропорционален градиенту температуры. В простейшем случае, когда температура T зависит только от одной декартовой координаты (например x), закон теплопроводности записывается в виде

$$j_x = -\kappa \cdot \frac{\partial T}{\partial x}. \quad (15.43)$$

Здесь

$$j_x = \frac{1}{S} \cdot \frac{\Delta Q_x}{\Delta t} \quad (15.44)$$

– величина, называемая потоком тепла, ΔQ_x – энергия, проходящая через площадку площадью S в направлении оси OX за время Δt . При этом предполагается, что площадка перпендикулярна оси OX . Знак “минус” в правой части формулы (15.43) указывает на то, что поток тепла идет в направлении убывания температуры. Постоянная величина κ в формуле (15.43) называется коэффициентом теплопроводности.

Изменение температуры во времени и в пространстве описывается уравнением теплопроводности, которое имеет вид

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\kappa}{c\rho} \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}. \quad (15.45)$$

Здесь c – удельная теплоемкость, ρ – плотность вещества. Уравнение (15.45) есть следствие закона теплопроводности и уравнения, выражающего

сохранение энергии:

$$c_p \frac{\partial T}{\partial t} = - \frac{\partial j_x}{\partial x}. \quad (15.46)$$

Примеры решения задач

Пример 15.1. В сосуде объемом V находится N молекул газа. Какова вероятность P того, что в части сосуда объемом v окажется n молекул газа?

Решение. Разобьем сосуд на малые элементы одинакового объема и будем считать, что попадания молекулы в любой из этих элементов представляют собой равновероятные случайные события.

Рассмотрим некоторую выделенную молекулу газа. Вероятность попадания этой молекулы в часть сосуда объемом v равна v/V . Вероятность попадания n выделенных молекул в указанную часть сосуда есть $(v/V)^n$. Это выражение получено с использованием аксиомы умножения вероятностей в предположении, что попадания нескольких молекул в выделенную часть сосуда – независимые случайные события. Аналогичным образом вычисляем вероятность того, что оставшиеся $N - n$ молекул газа попадут в часть сосуда объемом $V - v$, т.е. останутся за пределами выделенной нами части сосуда. Эта вероятность равна $(1 - v/V)^{N-n}$. Вероятность того, что оба указанные случайные события произойдут одновременно, равна $(v/V)^n \cdot (1 - v/V)^{N-n}$. Здесь также использована аксиома умножения вероятностей.

Найдем теперь вероятность того, что любые n молекул газа попадут в выделенную часть сосуда, а остальные останутся за ее пределами. Согласно аксиоме сложения вероятностей

$$P = C_N^n \cdot (v/V)^n \cdot (1 - v/V)^{N-n}, \quad (15.47)$$

где

$$C_N^n = \frac{N!}{n!(N-n)!} \quad (15.48)$$

– число способов, которыми можно выбрать n молекул из N молекул (число сочетаний). Формулы (15.47), (15.48) дают ответ на вопрос задачи. Распределение вероятности вида (15.47) называется биномиальным распределением или распределением Бернулли. Величина n пробегает значения $0, 1, 2, \dots, N$. Используя формулу для бинома Ньютона, легко убедиться, что это распределение удовлетворяет условию нормировки.

Поясним кратко формулу (15.48). Одну молекулу можно выбрать из N молекул N способами. На каждый из этих способов существует $N-1$ возможность выбрать вторую молекулу. Следовательно, выбрать две молекулы из N молекул можно $N \cdot (N-1)$ способами. Продолжая эти рассуждения, приходим к выводу, что число способов выбрать n молекул из N молекул равно $N \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (N-n+1)$. Обозначим это число символом A_N^n и представим в виде

$$A_N^n = \frac{N!}{(N-n)!}. \quad (15.49)$$

Оно равно числу способов разместить n различных элементов, например шахматных фигур, в N клетках и называется числом размещений из N по n .

Рассмотрим конкретный пример. Пусть $N = 3$, $n = 2$. Вычисляя число размещений по формуле (15.49), получим $A_3^2 = 6$. Этот результат легко проверить прямым перебором вариантов: 1-2, 1-3, 2-1, 2-3, 3-1, 3-2. Видно, однако, что среди этих наборов из двух элементов попадают одинаковые по составу наборы, отличающиеся только порядком следования элементов, например, 1-2 и 2-1 или 1-3 и 3-1. В нашей задаче о молекулах такие наборы следует считать эквивалентными. Чтобы получить число различных по составу наборов из N элементов по n , нужно поделить число размещений A_N^n на число перестановок P_n из n элементов. Таким образом, получаем

$$C_N^n = \frac{A_N^n}{P_n}. \quad (15.50)$$

Число перестановок P_n совпадает с числом размещений n элементов в n клетках, т.е.

$$P_n = A_n^n = n!. \quad (15.51)$$

Подстановка (15.49) и (15.51) в (15.50) приводит к формуле (15.48).

Пример 15.2. Найти решение задачи из примера 15.1 в предельном случае $N \rightarrow \infty$, $V \rightarrow \infty$, $N/V = \text{const}$.

Решение. В данном предельном случае $v \ll V$, $n \ll N$, поэтому

$$N - n \approx N, \quad A_N^n = N \cdot (N-1) \cdot \dots \cdot (N-n+1) \approx N^n \quad \text{и} \quad 1 - v/V \approx \exp(-v/V).$$

С учетом этих соотношений результат примера 15.1

$$P = \frac{N \cdot (N-1) \cdot \dots \cdot (N-n+1)}{n!} \cdot \left(\frac{v}{V}\right)^n \cdot \left(1 - \frac{v}{V}\right)^{N-n}$$

можно представить в виде

$$P = \frac{(Nv/V)^n}{n!} \cdot \exp(-Nv/V)$$

или

$$P = \exp(-\alpha) \cdot \frac{\alpha^n}{n!},$$

где $\alpha = v \cdot (N/V)$ – среднее число молекул в объеме v . Таким образом, число молекул в относительно небольшой части сосуда с газом есть пуассоновская случайная величина.

Пример 15.3. Найти относительную флуктуацию числа молекул в одном кубическом сантиметре воздуха при нормальных условиях.

Решение. Используя результат примера 15.2, будем считать число молекул n в одном кубическом сантиметре воздуха пуассоновской случайной величиной. Согласно формуле (15.17), относительная флуктуация числа молекул равна

$$\delta n = \frac{1}{\sqrt{n_0}},$$

где n_0 – среднее число молекул воздуха в одном кубическом сантиметре. Известно, что при нормальных условиях моль любого газа занимает объем, равный 22,4 литра. При этом в моле газа содержится число молекул, равное числу Авогадро: $N_A = 6,02 \cdot 10^{23}$. Используя эти данные, находим $n_0 = 2,7 \cdot 10^{19}$ (число Лошмидта) и $\delta n \approx 2 \cdot 10^{-10}$.

Пример 15.4. В сосуде объемом V находится N молекул идеального газа при температуре T . Найти давление газа p .

Решение. Давление газа на стенку сосуда возникает за счет ударов молекул. В столкновении со стенкой молекула ведет себя как материальная точка. Для вычисления силы давления используем закон изменения импульса механической системы, согласно которому скорость изменения импульса системы равна сумме внешних сил:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F}.$$

Рассмотрим в качестве системы совокупность молекул, испытывающих столкновение со стенкой сосуда в течение времени dt . Тогда $d\mathbf{p}$ – изменение импульса этой системы, вызванное столкновениями молекул со стенкой, $\mathbf{F}$ – сила действия стенки на молекулы. По третьему закону Ньютона эта сила равна и противоположна искомой силе давления молекул на стенку.

Направим ось OX перпендикулярно стенке сосуда, площадь которой S . В проекции на ось OX закон изменения импульса приобретает вид

$$\frac{dp_x}{dt} = F_x. \quad (15.52)$$

Вычислим величину dp_x . Пусть m – масса молекулы, v_x – составляющая скорости молекулы, параллельная оси OX . Удар молекулы о стенку сосуда будем считать абсолютно упругим. Результатом удара будет изменение скорости v_x на $-v_x$, при этом импульс молекулы изменится на величину

$$\Delta p_x = 2mv_x. \quad (15.53)$$

Таким образом, величина Δp_x , определяемая формулой (15.53), есть изменение x -компоненты импульса молекулы при упругом ударе о стенку, перпендикулярную оси OX . Далее нужно найти число ударов молекул, имеющих скорость v_x , о стенку за время dt . Это число равно

$$dN(v_x) = dn(v_x) \cdot S \cdot v_x \cdot dt, \quad (15.54)$$

где

$$dn(v_x) = n \cdot w(v_x) \cdot dv_x \quad (15.55)$$

– число молекул в единице объема газа, у которых скорость в направлении оси OX лежит в области от v_x до $v_x + dv_x$,

$$n = \frac{N}{V} \quad (15.56)$$

– полное число молекул в единице объема газа (концентрация молекул), $w(v_x) \cdot dv_x$ – вероятность того, что скорость молекулы в проекции на ось OX лежит в области от v_x до $v_x + dv_x$, $w(v_x)$ – распределение плотности вероятности для декартовой компоненты скорости молекулы v_x .

Перемножив величины Δp_x и $dN(v_x)$, найдем изменение x -компоненты импульса совокупности молекул, имеющих скорость v_x , в результате ударов о стенку за время dt :

$$dp_x(v_x) = \Delta p_x \cdot dN(v_x),$$

или, с учетом, формул (15.53) – (15.55),

$$dp_x(v_x) = 2m \cdot n \cdot S \cdot dt \cdot v_x^2 \cdot w(v_x) \cdot dv_x. \quad (15.57)$$

Теперь остается только просуммировать вклады молекул с различными скоростями. Интегрируя выражение (15.57) по v_x в пределах от 0 до ∞ , находим

$$dp_x = 2m \cdot n \cdot S \cdot dt \cdot \int_0^{\infty} v_x^2 \cdot w(v_x) dv_x. \quad (15.58)$$

Согласно формулам (15.52), (15.58), искомое давление газа

$$p = 2m \cdot n \int_0^{\infty} v_x^2 \cdot w(v_x) dv_x. \quad (15.59)$$

В силу четности этого распределения и формулы (15.34) имеем:

$$2 \int_0^{\infty} v_x^2 \cdot w(v_x) dv_x = \int_{-\infty}^{\infty} v_x^2 \cdot w(v_x) dv_x = \langle v_x^2 \rangle = kT / m . \quad (15.60)$$

Из (15.59) и (15.60) следует, что

$$p = nkT . \quad (15.61)$$

Уравнение (15.61) называется уравнением состояния идеального газа.

Пример 15.5. Найти распределение плотности вероятности $w(v)$ для модуля тепловой скорости v молекулы газа. Масса молекулы m , температура газа T .

Решение. По определению

$$w(v_0) = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{P(v_0 \leq v \leq v_0 + \Delta v)}{\Delta v} , \quad (15.62)$$

где $P(v_0 \leq v \leq v_0 + \Delta v)$ – вероятность того, что модуль скорости молекулы v лежит в интервале

$$v_0 \leq v \leq v_0 + \Delta v . \quad (15.63)$$

Эту вероятность можно вычислить по формуле

$$P(v_0 \leq v \leq v_0 + \Delta v) = \int_{\Omega} w(v_x, v_y, v_z) dv_x dv_y dv_z , \quad (15.64)$$

где $w(v_x, v_y, v_z)$ – распределение Максвелла (15.32), Ω – область в пространстве скоростей, определяемая условием (15.63). В данной области

$$w(v_x, v_y, v_z) \approx C \cdot \exp(-mv_0^2 / 2kT) = \text{const}.$$

В выражении (15.64) эта константа выходит из под знака интеграла, и мы получаем

$$\begin{aligned} P(v_0 \leq v \leq v_0 + \Delta v) &= C \cdot \exp(-mv_0^2 / 2kT) \int_{\Omega} dv_x dv_y dv_z = \\ &= C \cdot \exp(-mv_0^2 / 2kT) \cdot \Delta\Omega, \end{aligned} \quad (15.65)$$

где $\Delta\Omega$ – объем области Ω . Согласно определению (15.63), область Ω представляет собой шаровой слой радиусом v_0 и толщиной Δv . Поскольку $\Delta v \ll v_0$, величину $\Delta\Omega$ с хорошей точностью можно вычислить по формуле

$$\Delta\Omega = 4\pi v_0^2 \cdot \Delta v. \quad (15.66)$$

Из формул (15.62), (15.65), (15.66) получаем

$$w(v_0) = C \cdot 4\pi v_0^2 \cdot \exp(-mv_0^2 / 2kT).$$

Учитывая выражение (15.36) для константы C , окончательный результат представим в виде

$$w(v) = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} v^2 \cdot \exp(-mv^2 / 2kT). \quad (15.67)$$

Распределение (15.67) называется распределением Максвелла для модуля скорости молекулы. Величина v в этой формуле меняется от 0 до ∞ . Распределение (15.67) удовлетворяет условию нормировки.

Используя формулу (15.67), можно вычислить среднее значение модуля тепловой скорости молекулы газа

$$\langle v \rangle = \int_0^{\infty} v \cdot w(v) dv = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}. \quad (15.68)$$

Пример 15.6. Найти среднее значение модуля относительной скорости $\langle u \rangle$ двух молекул газа. Масса молекулы m , температура газа T .

Решение. Рассмотрим две молекулы газа, движущиеся со скоростями $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$. Согласно правилу сложения скоростей Галилея, скорость первой молекулы относительно второй (относительная скорость) равна

$$\mathbf{u} = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2.$$

Декартовы компоненты относительной скорости

$$u_x = v_{1x} - v_{2x}, \quad u_y = v_{1y} - v_{2y}, \quad u_z = v_{1z} - v_{2z} \quad (15.69)$$

представляют собой разности независимых гауссовых случайных величин и, следовательно, являются гауссовыми величинами. Усредняя равенства (15.69), видим, что средние значения декартовых компонент относительной скорости равны нулю:

$$\langle u_x \rangle = \langle u_y \rangle = \langle u_z \rangle = 0. \quad (15.70)$$

Остается вычислить дисперсии величин u_x, u_y, u_z . Используя формулы (15.69), находим

$$\begin{aligned} \langle u_x^2 \rangle &= \langle (v_{1x} - v_{2x})^2 \rangle = \\ &= \langle v_{1x}^2 \rangle + \langle v_{2x}^2 \rangle - 2 \langle v_{1x} v_{2x} \rangle = 2 \langle v_{1x}^2 \rangle. \end{aligned} \quad (15.71)$$

Здесь учтено, что среднее значение произведения независимых случайных величин равно произведению их средних значений:

$\langle v_{1x} \cdot v_{2x} \rangle = \langle v_{1x} \rangle \cdot \langle v_{2x} \rangle = 0$, и то, что обе рассматриваемые молекулы имеют одинаковые статистические характеристики скоростей: $\langle v_{1x} \rangle = \langle v_{2x} \rangle = 0$ и $\langle v_{1x}^2 \rangle = \langle v_{2x}^2 \rangle$. Формулы (15.70), (15.71) показывают, что дисперсия декартовой компоненты относительной скорости $\langle u_x^2 \rangle$ вдвое превышает дисперсию декартовой компоненты скорости молекулы $\langle v_x^2 \rangle$. Из формул (15.34) и (15.68) следует, что

$$\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8}{\pi} \cdot \langle v_x^2 \rangle}.$$

В силу идентичности статистических характеристик, аналогичным образом будут связаны и величины $\langle u \rangle$ и $\langle u_x^2 \rangle$:

$$\langle u \rangle = \sqrt{\frac{8}{\pi} \cdot \langle u_x^2 \rangle}.$$

Подставив сюда $\langle u_x^2 \rangle = 2 \langle v_x^2 \rangle = 2kT/m$, получим

$$\langle u \rangle = \langle v \rangle \sqrt{2} = 4 \sqrt{\frac{kT}{\pi m}}. \quad (15.72)$$

Пример 15.7. Шарики диаметром $d = 3 \cdot 10^{-7}$ м из материала плотностью $\rho = 1$ г/см³ находятся в воздухе при температуре $T = 300$ К. Найти среднюю высоту $\langle z \rangle$, на которую поднимаются шарики в результате теплового движения.

Решение. Распределение шариков по высоте z описывается формулой Больцмана

$$w(z) = C \cdot \exp\left(-\frac{mgz}{kT}\right). \quad (15.73)$$

Здесь $\Pi(z) = mgz$ – потенциальная энергия шарика в поле силы тяжести, m – масса шарика, g – ускорение свободного падения. Постоянная C в формуле (15.73) определяется условием нормировки

$$\int_0^{\infty} w(z) dz = 1. \quad (15.74)$$

Подставив (15.73) в (15.74) и вычислив интеграл, получим, что $C = 1/z_0$, где $z_0 = kT/mg$. Среднее значение высоты шарика

$$\langle z \rangle = \int_0^{\infty} z \cdot w(z) dz = z_0.$$

Учитывая, что масса шарика равна $m = \rho \pi d^3 / 6$, получаем ответ:

$$\langle z \rangle = \frac{6kT}{\pi g \rho d^3} = 3 \cdot 10^{-5} \text{ м.}$$

Пример 15.8. Найти среднюю кинетическую энергию $\langle K \rangle$ молекулы двухатомного газа при температуре T .

Решение. Кинетическая энергия твердого тела при произвольном движении определяется формулой (см. пример 9.6):

$$K = \frac{1}{2} m (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) + \frac{1}{2} (I_\alpha \omega_\alpha^2 + I_\beta \omega_\beta^2 + I_\gamma \omega_\gamma^2),$$

где v_x, v_y, v_z – декартовы компоненты скорости центра масс молекулы, $\omega_\alpha, \omega_\beta, \omega_\gamma$ – проекции мгновенной угловой скорости вращения молекулы на ее главные оси инерции, m – масса молекулы, $I_\alpha, I_\beta, I_\gamma$ – главные моменты

инерции молекулы. В случае двухатомной молекулы два из трех главных момента инерции совпадают, а третий равен нулю, поэтому можно записать

$$I_{\alpha} = I_{\beta} \equiv I, \quad I_{\gamma} = 0,$$

где I – момент инерции молекулы относительно центра масс. Выражение для кинетической энергии принимает вид:

$$K = \frac{1}{2} m(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) + \frac{1}{2} I(\omega_{\alpha}^2 + \omega_{\beta}^2).$$

Величины $v_x, v_y, v_z, \omega_{\alpha}, \omega_{\beta}$ можно рассматривать как обобщенные скорости системы. Вычислим обобщенные импульсы системы, определенные как частные производные функции Лагранжа или кинетической энергии по обобщенным скоростям. Обозначив обобщенные импульсы через $p_x, p_y, p_z, p_{\alpha}, p_{\beta}$, получим

$$p_x = \frac{\partial K}{\partial v_x} = mv_x, \quad p_y = \frac{\partial K}{\partial v_y} = mv_y, \quad p_z = \frac{\partial K}{\partial v_z} = mv_z,$$

$$p_{\alpha} = \frac{\partial K}{\partial \omega_{\alpha}} = I\omega_{\alpha}, \quad p_{\beta} = \frac{\partial K}{\partial \omega_{\beta}} = I\omega_{\beta}.$$

Выражая обобщенные скорости через обобщенные импульсы и подставляя их в формулу для кинетической энергии, получим гамильтониан системы

$$H = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + \frac{1}{2I}(p_{\alpha}^2 + p_{\beta}^2).$$

Из этого выражения видно, что гамильтониан двухатомной молекулы содержит пять квадратичных степеней свободы. Согласно теореме о равнораспределении энергии по степеням свободы, на каждую квадратичную степень свободы приходится в среднем одинаковая энергия, равная $kT/2$.

Следовательно,

$$\langle K \rangle = \frac{5}{2} kT.$$

Пример 15.9. В сосуде объемом V находится N молекул газа при температуре T . Считая молекулы твердыми шариками массой m и диаметром d , вычислить среднее время τ_c и среднюю длину λ свободного пробега молекулы.

Решение. Рассмотрим некоторую выделенную молекулу газа. Для расчета представим эту молекулу шаром радиусом d , а остальные молекулы заменим неподвижными материальными точками. Будем считать, что шар движется равномерно со скоростью $\langle u \rangle$, равной среднему значению модуля относительной скорости двух молекул газа. Эта скорость определяется формулой (15.72), именно $\langle u \rangle = \langle v \rangle \sqrt{2}$, где

$$\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}$$

– среднее значение модуля тепловой скорости молекулы газа.

Число столкновений dN , которые испытает выделенная молекула (шар) за время dt , определяется формулой

$$dN = n \cdot dV,$$

где $n = N/V$ – концентрация молекул, $dV = S \cdot \langle u \rangle \cdot dt$ – объем трубки длиной $\langle u \rangle \cdot dt$ с площадью поперечного сечения $S = \pi d^2$. Таким образом, $dN = n \cdot S \cdot \langle u \rangle \cdot dt$. Учитывая, что средняя частота столкновений молекулы $\nu = dN / dt = n \cdot S \cdot \langle u \rangle$, среднее время свободного пробега $\tau_c = 1/\nu$, средняя длина свободного пробега $\lambda = \langle v \rangle \cdot \tau_c$, получаем:

$$\tau_c = \frac{V}{4\pi d^2 N} \sqrt{\frac{\pi m}{kT}}, \quad \lambda = \frac{V}{\pi \sqrt{2} d^2 N}.$$

Пример 15.10. В сосуде с газом поддерживается неоднородное распределение концентрации молекул $n = n(x)$ вдоль оси OX . Вычислить коэффициент диффузии молекул газа D , если известна средняя тепловая скорость $\langle v \rangle$ и средняя длина свободного пробега λ молекул газа.

Решение. Рассмотрим площадку площадью S , расположенную в плоскости $x = 0$. Введем также две вспомогательные плоскости с координатами $x_1 = -\lambda$ и $x_2 = \lambda$. Для расчета будем считать, что в области $-\lambda \leq x \leq 0$ концентрация молекул газа постоянна и равна $n_1 = n(-\lambda)$, а в области $0 \leq x \leq \lambda$ концентрация молекул постоянна и равна $n_2 = n(\lambda)$. Скорости всех молекул будем считать одинаковыми, постоянными и равными $\langle v \rangle$.

Число частиц ΔN_1 , пересекающих площадку площадью S за время Δt в направлении оси OX

$$\Delta N_1 = \frac{1}{6} \cdot n_1 \cdot \langle v \rangle \cdot \Delta t \cdot S,$$

число частиц, пересекающих ту же площадку за то же время в противоположном направлении

$$\Delta N_2 = \frac{1}{6} \cdot n_2 \cdot \langle v \rangle \cdot \Delta t \cdot S.$$

Множитель $1/6$ в этих формулах учитывает тот факт, что в направлении оси OX (а также в направлении против оси OX) движется в среднем $1/6$ от полного числа молекул газа.

Поток частиц в направлении оси OX равен

$$j_x = \frac{\Delta N_x}{S \cdot \Delta t} = \frac{\Delta N_1 - \Delta N_2}{S \cdot \Delta t},$$

или

$$j_x = \frac{1}{6} \cdot \langle v \rangle \cdot (n_1 - n_2).$$

Считая величину λ достаточно малой, n_1 и n_2 можно приближенно вычислить по формулам

$$n_1 = n_0 - \lambda \cdot \frac{\partial n}{\partial x}, \quad n_2 = n_0 + \lambda \cdot \frac{\partial n}{\partial x},$$

где $n_0 = n(0)$. Отсюда $n_1 - n_2 = -2\lambda \cdot \frac{\partial n}{\partial x}$ и, следовательно,

$$j_x = -\frac{1}{3} \lambda \cdot \langle v \rangle \cdot \frac{\partial n}{\partial x}.$$

Согласно определению коэффициента диффузии, $j_x = -D \cdot \frac{\partial n}{\partial x}$. Сопоставляя

две последние формулы, находим ответ: $D = \frac{1}{3} \lambda \cdot \langle v \rangle$.

Задание для самостоятельной работы

15.11. Показать, что дисперсия пуассоновской случайной величины равна ее среднему значению.

15.12. Независимые случайные величины x и y имеют плотности вероятности $w_1(x)$ и $w_2(y)$. Найти плотности вероятности для суммы $u = x + y$ и

разности $v = x - y$ этих величин.

15.13. Найти плотность вероятности $w(u)$ для разности независимых гауссовых случайных величин $u = x - y$, если $\langle x \rangle = \langle y \rangle = 0$, $\langle x^2 \rangle = \langle y^2 \rangle = \sigma^2$.

15.14. Считая, что число столкновений n , которые испытывает молекула газа за время t , является пуассоновской случайной величиной со средним значением $\langle n \rangle = \nu \cdot t$, где $\nu = \text{const}$ – средняя частота столкновений, найти плотность вероятности $w(\tau)$ для времени свободного пробега молекулы τ .

15.15. Найти среднее значение модуля тепловой скорости $\langle v \rangle$ молекулы воздуха при температуре $T = 300$ К. Масса молекулы $m = 4,8 \cdot 10^{-26}$ кг.

15.16. Найти плотность вероятности $w(K)$ для кинетической энергии $K = mv^2/2$ молекулы одноатомного газа, находящегося при температуре T .

15.17. Идеальный газ, имеющий температуру T , состоит из молекул с массами m_1 и m_2 . Найти среднее значение $\langle u \rangle$ модуля относительной скорости этих молекул u .

15.18. Шарики диаметром $d = 3 \cdot 10^{-7}$ м из материала с плотностью $\rho = 2,5 \text{ г/см}^3$ находятся в жидкости с плотностью $\rho_0 = 1 \text{ г/см}^3$ при температуре $T = 300$ К. Найти среднюю высоту $\langle z \rangle$, на которую поднимаются шарики в результате теплового движения.

15.19. В зале высотой $h = 10$ м находится воздух при температуре $T = 300$ К. Во сколько раз α плотность воздуха около пола превышает плотность воздуха под потолком зала? Молярная масса воздуха $\mu = 29 \text{ г/моль}$, универ-

сальная газовая постоянная $R = 8,31 \text{ Дж}/(\text{моль} \cdot \text{К})$, ускорение свободного падения $g = 9,8 \text{ м/с}$.

15.20. Найти среднюю длину свободного пробега λ для молекулы воздуха при температуре $T = 300 \text{ К}$ и давлении $p = 10^5 \text{ Па}$. Диаметр молекулы $d = 3,6 \cdot 10^{-10} \text{ м}$.

15.21. По проводу радиусом r_0 течет постоянный ток силой I . Найти распределение температуры в поперечном сечении провода $T(r)$, если коэффициент теплопроводности материала κ , его удельное сопротивление ρ , а температура поверхности провода T_0 .

§16. Численный анализ в механике

Краткие теоретические сведения

Задача о движении системы из N взаимодействующих материальных точек описывается N векторными уравнениями, вытекающими из законов Ньютона (см. § 4):

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \sum_{j \neq i} \mathbf{f}_{ij} + \mathbf{F}_i, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (16.1)$$

с начальными условиями

$$\mathbf{r}_i(0) = \mathbf{r}_{i0}, \quad \dot{\mathbf{r}}_i(0) = \mathbf{v}_{i0}, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (16.2)$$

Здесь m_i – масса i -й точки, $\mathbf{r}_i$ – ее радиус-вектор, $\mathbf{f}_{ij}$ – сила взаимодействия между i -й и j -й точками, входящими в систему (внутренняя сила), $\mathbf{F}_i$ – сумма сил, действующих на i -ю точку со стороны тел, не входящих в систему (внешняя сила). Задача, описываемая уравнениями (16.1) с начальными условиями (16.2), представляет собой хорошо известную в математике задачу Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка. В общем виде такая задача при $N > 2$ решения в квадратурах не имеет. Поэтому в задачах механики многих тел широко применяются методы численного анализа с использованием современной вычислительной техники.

Проиллюстрируем вначале применение численных методов на примере одного уравнения динамики

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{F}\left(\mathbf{r}, \frac{d\mathbf{r}}{dt}, t\right), \quad \mathbf{r}(0) = \mathbf{r}_0, \quad \frac{d\mathbf{r}}{dt}(0) = \mathbf{v}_0, \quad (16.3)$$

а затем обобщим на случай произвольного числа уравнений. При постановке задачи для численного решения обычно осуществляется переход от ре-

альных переменных, имеющих конкретную размерность (метр, секунда, килограмм и т.п.) к так называемым безразмерным переменным, которые образуются из соответствующих размерных переменных путем деления их на заранее выбранные масштабы. Необходимость такого перехода вызвана, во-первых, ограниченностью диапазона представления чисел в памяти компьютера и неизбежной потерей точности при выполнении процессором арифметических операций над числами, отличающимися друг от друга на много порядков, а во-вторых, возможностью выявления весьма полезных соотношений между параметрами подобия задачи, существенно способствующих ее более глубокому пониманию. Вопрос о конкретном выборе масштабов для переменных решается в каждой задаче отдельно.

Рассмотрим приведение к безразмерному виду задачи (16.3). Пусть характерная область изменения радиус-вектора частицы имеет размер L , а характерное время задачи равно T . Введем безразмерные радиус-вектор ρ и время τ в соответствии с выражениями

$$\rho = \frac{\mathbf{r}}{L}, \quad \tau = \frac{t}{T}. \quad (16.4)$$

При этом уравнение (16.3) преобразуется к виду

$$m \frac{L}{T^2} \frac{d^2 \rho}{d\tau^2} = F \left(L \rho, \frac{L}{T} \frac{d\rho}{d\tau}, T\tau \right). \quad (16.5)$$

Вводя безразмерную силу Φ по формуле

$$\Phi \left(\rho, \frac{d\rho}{d\tau}, \tau \right) = \frac{T^2}{Lm} F \left(L \rho, \frac{L}{T} \frac{d\rho}{d\tau}, T\tau \right), \quad (16.6)$$

получаем окончательно

$$\frac{d^2 \rho}{d\tau^2} = \Phi \left(\rho, \frac{d\rho}{d\tau}, \tau \right), \quad \rho(0) = \rho_0, \quad \frac{d\rho}{d\tau}(0) = \Phi_0, \quad (16.7)$$

где $\rho_0 = \mathbf{r}_0/L$, $\Phi_0 = \mathbf{v}_0 T/L$ – начальные условия для безразмерных перемен-

ных. Векторная задача (16.7) распадается на три скалярных задачи в проекциях на декартовы оси координат:

$$\begin{aligned}\frac{d^2\xi}{d\tau^2} &= \Phi_\xi\left(\boldsymbol{\rho}, \frac{d\boldsymbol{\rho}}{d\tau}, \tau\right), \quad \xi(0) = \xi_0, \quad \frac{d\xi}{d\tau}(0) = \varphi_{\xi 0}, \\ \frac{d^2\eta}{d\tau^2} &= \Phi_\eta\left(\boldsymbol{\rho}, \frac{d\boldsymbol{\rho}}{d\tau}, \tau\right), \quad \eta(0) = \eta_0, \quad \frac{d\eta}{d\tau}(0) = \varphi_{\eta 0}, \\ \frac{d^2\varsigma}{d\tau^2} &= \Phi_\varsigma\left(\boldsymbol{\rho}, \frac{d\boldsymbol{\rho}}{d\tau}, \tau\right), \quad \varsigma(0) = \varsigma_0, \quad \frac{d\varsigma}{d\tau}(0) = \varphi_{\varsigma 0},\end{aligned}\tag{16.8}$$

где $\{\xi, \eta, \varsigma\} = \boldsymbol{\rho}$. Рассмотрим в качестве примера одно скалярное уравнение:

$$\frac{d^2\xi}{d\tau^2} = \Phi\left(\xi, \frac{d\xi}{d\tau}, \tau\right), \quad \xi(0) = \xi_0, \quad \frac{d\xi}{d\tau}(0) = \varphi_0.\tag{16.9}$$

Запишем дифференциальное уравнение второго порядка (16.9) как систему двух уравнений первого порядка

$$\begin{aligned}\frac{d\xi}{d\tau} &= \varphi, & \xi(0) &= \xi_0; \\ \frac{d\varphi}{d\tau} &= \Phi(\xi, \varphi, \tau), & \varphi(0) &= \varphi_0.\end{aligned}\tag{16.10}$$

Основная идея численного интегрирования систем обыкновенных дифференциальных уравнений вида (16.10) состоит в дискретизации переменной τ , т.е. разбиении оси $O\tau$ на отрезки длиной $\Delta\tau$ и введении сетки $\tau_i = i\Delta\tau$, $i = 0, 1, 2, \dots$. Особенности, связанные с такой дискретизацией, удобно рассмотреть вначале на примере одного уравнения первого порядка, а затем обобщить на случай системы уравнений. Пусть

$$\frac{du}{d\tau} = f(u, \tau), \quad u(0) = u_0.\tag{16.11}$$

Проинтегрируем (16.11) по интервалу $\Delta\tau$ между точками τ_i и τ_{i+1} :

$$u_{i+1} = u_i + \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} f(u, \tau) d\tau. \quad (16.12)$$

Разные численные методы отличаются друг от друга подходами к аппроксимации интеграла в правой части (16.12).

Простейший способ аппроксимации состоит в замене подинтегральной функции ее значением в точке u_i, τ_i . В результате получаем алгоритм, называемый методом Эйлера:

$$u_{i+1} = u_i + f(u_i, \tau_i) \Delta\tau, \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (16.13)$$

Расчетная схема (16.13) проста и экономична. Однако надо иметь в виду, что она не всегда устойчива по отношению к малым ошибкам, допущенным на каком-либо шаге вычислений. Исследования показывают, что метод Эйлера устойчив, если выполнены следующие условия:

$$\frac{\partial f}{\partial u} \leq 0, \quad \Delta\tau \leq \frac{2}{|\partial f / \partial u|}. \quad (16.14)$$

В противном случае ошибки вычислений на отдельных шагах быстро накапливаются и могут сильно исказить решение, сделав его непригодным для практических целей. Поскольку в задачах механики условие $\partial f / \partial u \leq 0$ выполняется не всегда, применимость метода Эйлера в этих задачах ограничена.

Одним из наиболее употребительных на практике является метод Рунге-Кутты четвертого порядка. В этом методе на каждом шаге вычисляются четыре числа:

$$\begin{aligned} k_1^{(i)} &= f(u_i, \tau_i) \cdot \Delta\tau, \\ k_2^{(i)} &= f(u_i + k_1^{(i)} / 2, \tau_i + \Delta\tau / 2) \cdot \Delta\tau, \\ k_3^{(i)} &= f(u_i + k_2^{(i)} / 2, \tau_i + \Delta\tau / 2) \cdot \Delta\tau, \\ k_4^{(i)} &= f(u_i + k_3^{(i)}, \tau_i + \Delta\tau) \cdot \Delta\tau. \end{aligned} \quad (16.15)$$

Последовательные значения u_{i+1} искомой функции определяются так:

$$u_{i+1} = u_i + \Delta u_i, \quad \Delta u_i = \frac{1}{6} \left(k_1^{(i)} + 2k_2^{(i)} + 2k_3^{(i)} + k_4^{(i)} \right). \quad (16.16)$$

Аналитические оценки устойчивости метода Рунге-Кутты в общем случае произвести не удастся. Поэтому для определения правильности выбора шага $\Delta\tau$ обычно применяют на каждом этапе расчета, состоящем из двух шагов, двойной пересчет: с выбранным ($\Delta\tau$) и половинным ($\Delta\tau/2$) шагами. Если расхождение полученных при этом решений не превышает наперед заданной погрешности, то оставляют выбранный шаг; в противном случае шаг уменьшают вдвое.

Метод Рунге-Кутты легко обобщается на случай системы уравнений. Например, для двух уравнений

$$\frac{du}{d\tau} = f(u, v, \tau), \quad \frac{dv}{d\tau} = g(u, v, \tau) \quad (16.17)$$

расчеты ведутся по формулам:

$$\begin{aligned} k_1^{(i)} &= f(u_i, v_i, \tau_i) \cdot \Delta\tau, \\ m_1^{(i)} &= g(u_i, v_i, \tau_i) \cdot \Delta\tau, \\ k_2^{(i)} &= f(u_i + k_1^{(i)} / 2, v_i + m_1^{(i)} / 2, \tau_i + \Delta\tau / 2) \cdot \Delta\tau, \\ m_2^{(i)} &= g(u_i + k_1^{(i)} / 2, v_i + m_1^{(i)} / 2, \tau_i + \Delta\tau / 2) \cdot \Delta\tau, \\ &\dots\dots\dots \\ k_4^{(i)} &= f(u_i + k_3^{(i)}, v_i + m_3^{(i)}, \tau_i + \Delta\tau) \cdot \Delta\tau, \\ m_4^{(i)} &= g(u_i + k_3^{(i)}, v_i + m_3^{(i)}, \tau_i + \Delta\tau) \cdot \Delta\tau, \\ \Delta u_i &= \frac{1}{6} \left(k_1^{(i)} + 2k_2^{(i)} + 2k_3^{(i)} + k_4^{(i)} \right), \\ \Delta v_i &= \frac{1}{6} \left(m_1^{(i)} + 2m_2^{(i)} + 2m_3^{(i)} + m_4^{(i)} \right), \\ u_{i+1} &= u_i + \Delta u_i, \quad v_{i+1} = v_i + \Delta v_i. \end{aligned} \quad (16.18)$$

Примеры численного анализа

Пример 16.1. Ракета ведет преследование цели так, что вектор ее скорости $\mathbf{v}$ в каждый момент времени направлен на цель, а модуль скорости v является постоянным. Цель движется по параболической траектории как тело, брошенное со скоростью v_0 под углом α к горизонту. Рассмотрим несколько точек запуска ракеты и провести для них расчет семейства траекторий ракеты, запускаемой в разные моменты времени. Для каждого семейства выбрать траекторию с минимальной кривизной, двигаясь по которой ракета успеет поразить цель над поверхностью Земли.

Анализ. По условию задачи движение ракеты и цели происходит в одной плоскости, перпендикулярной поверхности Земли. Совместим с этой плоскостью координатную плоскость XOY , начало координат поместим в стартовую точку цели. Обозначим через x, y координаты ракеты, через x_1, y_1 – координаты цели. За начало отсчета времени примем момент пуска цели, момент запуска ракеты обозначим через t_s .

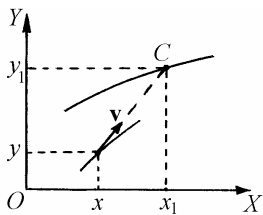


Рис. 16.1

В соответствии со стратегией преследования касательная к траектории ракеты в каждый момент времени проходит через точку C , отображающую местонахождение цели (рис. 16.1). Следовательно,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y_1 - y}{x_1 - x}, \text{ или } \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{y_1 - y}{x_1 - x}. \quad (16.19)$$

Воспользовавшись соотношением $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = v^2$, выразим из (16.19) проекции скорости ракеты:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{v(x_1 - x)}{\sqrt{(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2}}, \quad t \geq t_s, \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{v(y_1 - y)}{\sqrt{(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2}}, \quad t \geq t_s. \end{aligned} \quad (16.20)$$

Обозначив через x_0, y_0 координаты точки запуска ракеты, сформулируем начальные условия для ее движения:

$$x(t_s) = x_0, \quad y(t_s) = y_0. \quad (16.21)$$

Движение цели по условию задачи описывается кинематическими соотношениями

$$x_1(t) = v_0 \cos \alpha \cdot t, \quad y_1(t) = v_0 \sin \alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2}. \quad (16.22)$$

В качестве масштабов длины и времени выберем дальность полета цели L и время ее полета от начальной до конечной точки T :

$$L = \frac{2v_0^2}{g} \sin \alpha \cos \alpha, \quad T = \frac{2v_0}{g} \sin \alpha. \quad (16.23)$$

Введем безразмерные координаты и время по формулам:

$$\xi = \frac{x}{L}, \quad \eta = \frac{y}{L}, \quad \xi_1 = \frac{x_1}{L}, \quad \eta_1 = \frac{y_1}{L}, \quad \tau = \frac{t}{T}. \quad (16.24)$$

В этих переменных соотношения (16.22), описывающие движение цели, принимают вид:

$$\xi_1 = \tau, \quad \eta_1 = \operatorname{tg} \alpha (\tau - \tau^2). \quad (16.25)$$

Переход к безразмерным переменным в системе уравнений (16.20) дает:

$$\begin{aligned} \frac{1}{L} \frac{d\xi}{d\tau} &= \frac{v(\xi_1 - \xi)}{\sqrt{(\xi_1 - \xi)^2 + (\eta_1 - \eta)^2}}, \quad \tau \geq \tau_s, \quad \xi(\tau_s) = \xi_0, \\ \frac{1}{L} \frac{d\eta}{d\tau} &= \frac{v(\eta_1 - \eta)}{\sqrt{(\xi_1 - \xi)^2 + (\eta_1 - \eta)^2}}, \quad \tau \geq \tau_s, \quad \eta(\tau_s) = \eta_0, \end{aligned} \quad (16.26)$$

где $\tau_s = t_s / T$, $\xi_0 = x_0 / L$, $\eta_0 = y_0 / L$. Подставляя в (16.26) координаты цели как явные функции времени, окончательно получаем:

$$\begin{aligned} \frac{d\xi}{d\tau} &= \frac{u(\xi_1 - \xi)}{\sqrt{(\tau - \xi)^2 + (\operatorname{tg} \alpha \cdot (\tau - \tau^2) - \eta)^2}}, \quad \tau \geq \tau_s, \quad \xi(\tau_s) = \xi_0, \\ \frac{d\eta}{d\tau} &= \frac{u(\operatorname{tg} \alpha \cdot (\tau - \tau^2) - \eta)}{\sqrt{(\tau - \xi)^2 + (\operatorname{tg} \alpha \cdot (\tau - \tau^2) - \eta)^2}}, \quad \tau \geq \tau_s, \quad \eta(\tau_s) = \eta_0, \end{aligned} \quad (16.27)$$

где $u = v / (v_0 \cos \alpha)$ – безразмерная скорость ракеты.

Для интегрирования системы уравнений (16.27) воспользуемся методом Рунге-Кутты. Шаг интегрирования Δt здесь и далее будем подбирать таким образом, чтобы его изменение вдвое вызывало относительное изменение решения в конечной точке не более, чем на $\delta = 10^{-5}$. Кривизну траектории K будем вычислять по формуле

$$K = \frac{1}{R} = \left| \frac{d^2 \mathbf{p}}{ds^2} \right| = \sqrt{\left(\frac{d^2 \xi}{ds^2} \right)^2 + \left(\frac{d^2 \eta}{ds^2} \right)^2}, \quad (16.28)$$

где R – радиус кривизны, $ds = \sqrt{(d\xi)^2 + (d\eta)^2}$ – дифференциал длины дуги траектории. Производные $d^2 \xi / ds^2$, $d^2 \eta / ds^2$ аппроксимируем разностными операторами по формулам численного дифференцирования:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \xi}{ds^2} &\approx \frac{\Delta^2 \xi}{\Delta s^2} = \frac{4(\xi_{i+1} - 2\xi_i + \xi_{i-1}))}{(\xi_{i+1} - \xi_{i-1})^2 + (\eta_{i+1} - \eta_{i-1})^2}, \\ \frac{d^2 \eta}{ds^2} &\approx \frac{\Delta^2 \eta}{\Delta s^2} = \frac{4(\eta_{i+1} - 2\eta_i + \eta_{i-1}))}{(\xi_{i+1} - \xi_{i-1})^2 + (\eta_{i+1} - \eta_{i-1})^2}, \end{aligned} \quad (16.29)$$

где ξ_i, η_i — значения координат ракеты в момент времени $\tau_i = i\Delta\tau$. При заданной скорости ракеты кривизна траектории дает величину центростремительного ускорения ракеты в данной точке:

$$a_n = \frac{u^2}{R} = Ku^2. \quad (16.30)$$

Результаты численного моделирования проиллюстрированы на рис. 16.2, 16.3. В частности, на рис. 16.2, а изображены траектория цели и семейство траекторий ракеты имеющей скорость $u = 2$ и запускаемой из точки с координатами $x_0 = 0,5, y_0 = 0$ в моменты времени $\tau_s = 0,2, 0,3, 0,4, 0,5, 0,6$ (кривые 1, 2, 3, 4, 5 соответственно). На рис. 16.2, б представлены зависимости нормального ускорения ракеты от времени для тех же моментов запуска.

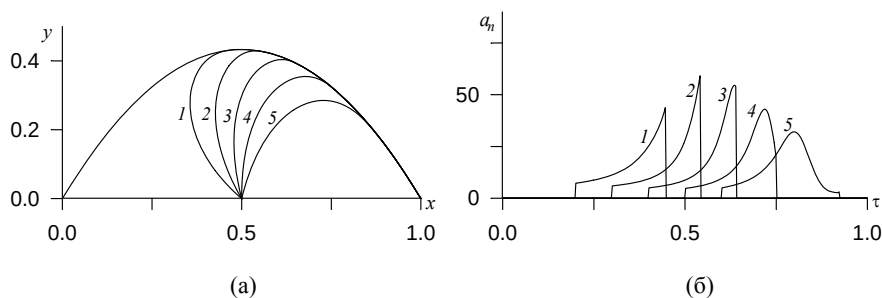


Рис. 16.2

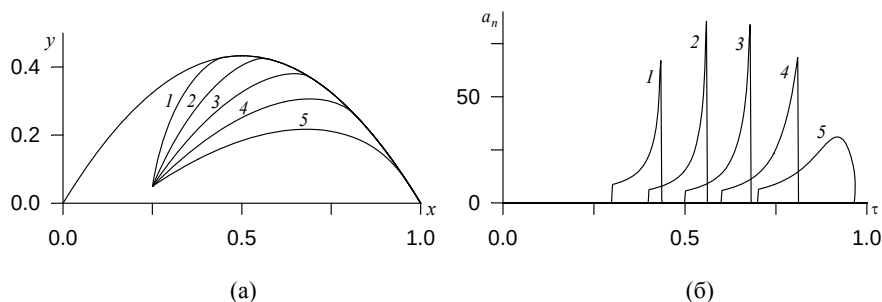


Рис. 16.3

Анализ этих рисунков дает возможность изучить закономерности криволинейного движения точки с постоянной по модулю скоростью, непосредственно связать локальную кривизну траектории с величиной нормального ускорения точки. Следует обратить внимание на то, что в задачах преследования как правило выгодно выбирать траектории с наименьшей возможной кривизной, так как при этом ракета испытывает минимальные перегрузки и снижается расход топлива. В рассмотренном примере наименьшая кривизна траектории достигается при $\tau_s = 0,6$, однако запуск ракеты в столь позднее время сопряжен с риском, ибо ракета поражает цель уже вблизи поверхности Земли. Для сравнения на рис. 16.3 изображены результаты преследования цели ракетой, имеющей скорость $u = 3$ и запускаемой из точки с координатами $x_0 = 0,25, y_0 = 0,05$ в моменты времени $\tau_s = 0,3, 0,4, 0,5, 0,6, 0,7$ (кривые 1, 2, 3, 4, 5 соответственно). Важно отметить, что смещение точки запуска ракеты к месту старта цели приводит к необходимости увеличить скорость ракеты, т.к. при $u = 2$ большинство сеансов преследования заканчивается неудачей: ракета не успевает поразить цель в воздухе. Как следствие этого, нормальное ускорение ракеты на всех траекториях, кроме последней, по сравнению с предыдущим случаем возрастает. Приведенный пример показывает, что даже в простейшей постановке определение оптимального сценария преследования представляет собой сложную многопараметрическую задачу.

Пример 16.2. Материальная точка (частица) движется под действием силы притяжения к неподвижному силовому центру. Исследовать основные закономерности такого движения. Рассмотреть силовые поля с потенциалами вида:

$$\Pi_1 = kr^2 / 2 ,$$

$$\Pi_2 = k(r - l_0)^2 / 2 ,$$

$$\Pi_3 = -A / r ,$$

$$\Pi_4 = -A / r^{1+\delta} ,$$

где k – константа упругого взаимодействия с силовым центром, l_0 – расстояние от центра, при котором сила упругости меняет знак, $A > 0$ – константа кулоновского взаимодействия, r – расстояние от частицы до силового центра.

Анализ. При движении материальной точки (частицы) в поле центральной силы выполняется закон сохранения момента импульса

$$\mathbf{N} = [\mathbf{r}, m\mathbf{v}] = \text{const} , \quad (15.31)$$

где $\mathbf{r}$ – радиус-вектор, $\mathbf{v}$ – скорость, m – масса частицы.

Поскольку вектор $\mathbf{N}$ в каждый момент времени перпендикулярен векторам $\mathbf{r}$ и $\mathbf{v}$, движущаяся частица остается в одной и той же плоскости, проходящей через силовой центр и вектор начальной скорости. Следовательно траектория частицы представляет собой плоскую кривую.

Закон сохранения момента импульса влечет за собой постоянство секториальной скорости

$$\sigma = \frac{dS}{dt} = |[\mathbf{r}, \mathbf{v}]| = \frac{N}{2m} = \text{const} . \quad (16.32)$$

Скорость σ численно равна площади, описываемой радиус-вектором частицы в единицу времени. Соотношение (16.32) известно как второй закон Кеплера, который утверждает, что при движении точки в центрально-симметричном поле за одинаковые промежутки времени радиус-вектор точки описывает одинаковые площади.

Центральные силы любой физической природы являются консервативными: их работа на произвольной замкнутой траектории равна нулю. Поэтому при движении частицы в поле такой пространственной конфигурации ее полная механическая энергия сохраняется:

$$\frac{mv^2}{2} + \Pi(\mathbf{r}) = E_0 . \quad (16.33)$$

Законы сохранения (16.32), (16.33), записанные в полярных координатах, обычно называют интегралами площадей и энергии. В курсах теоретической механики [5, 6] их используют для анализа общих свойств движения и получения уравнений траектории.

Векторное уравнение движения частицы под действием силы $\mathbf{F} = -\text{grad } \Pi(\mathbf{r})$, имеет вид

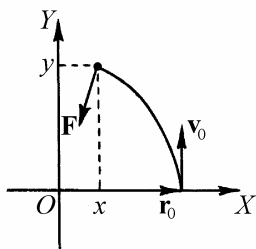


Рис. 16.4

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{F}. \quad (16.34)$$

Совместим с плоскостью движения частицы координатную плоскость XOY , начало координат поместим в силовой центр (рис. 16.4). В проекциях на координатные оси уравнение (16.34) принимает вид

$$\begin{aligned} m \frac{d^2 x}{dt^2} &= -\frac{\partial \Pi}{\partial x}, \\ m \frac{d^2 y}{dt^2} &= -\frac{\partial \Pi}{\partial y}. \end{aligned} \quad (16.35)$$

Начальные условия в общем случае имеют вид

$$x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0, \quad \frac{dx}{dt}(0) = v_{0x}, \quad \frac{dy}{dt}(0) = v_{0y}. \quad (16.36)$$

Для упрощения постановки задачи и интерпретации результатов будем рассматривать только такие движения частицы, при которых ее начальная скорость $\mathbf{v}_0$ перпендикулярна начальному радиус-вектору $\mathbf{r}_0$. В этом случае число независимых параметров подобия задачи минимально и сводится к одному для потенциалов $\Pi_1 = kr^2/2$, $\Pi_3 = -A/r$ и к двум для потенциалов $\Pi_2 = k(r - l_0)^2/2$, $\Pi_4 = -A/r^{1+\delta}$.

Не ограничивая общности, будем полагать, что координатная ось Ox проходит через начальную точку движения частицы (рис. 16.4). Тогда условия (16.36) принимают вид

$$x(0) = r_0, \quad y(0) = 0, \quad \frac{dx}{dt}(0) = 0, \quad \frac{dy}{dt}(0) = v_0. \quad (16.37)$$

При численном интегрировании системы дифференциальных уравнений (16.35) с начальными условиями (16.37) удобно перейти к безразмерным переменным путем нормировки переменных x, y, t . В качестве пространственного масштаба естественно взять начальное расстояние от частицы до силового центра r_0 , в качестве масштаба времени – величину $t_0 = r_0 / v_0$. Вводя безразмерные координаты ξ, η и время τ по формулам

$$\xi = x / r_0, \quad \eta = y / r_0, \quad \tau = v_0 t / r_0, \quad (16.38)$$

получаем безразмерные уравнения движения

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \xi}{d\tau^2} &= -\frac{1}{m v_0^2} \cdot \frac{\partial \Pi}{\partial \xi}, \\ \frac{d^2 \eta}{d\tau^2} &= -\frac{1}{m v_0^2} \cdot \frac{\partial \Pi}{\partial \eta}. \end{aligned} \quad (16.39)$$

и начальные условия

$$\xi(0) = 1, \quad \eta(0) = 0, \quad \frac{d\xi}{d\tau} = 0, \quad \frac{d\eta}{d\tau} = 1. \quad (16.40)$$

Выбранная нормировка переменных означает, что частица начинает движение из одной и той же точки $\xi = 1, \eta = 0$, имея единичную скорость, направленную перпендикулярно оси $O\xi$. Начальные данные r_0, v_0 , а также масса частицы m и константы взаимодействия с силовым центром, соответствующие реальному движению, образуют безразмерные параметры подобия задачи.

Исследуем движение частицы в рассматриваемых силовых полях.

1. Потенциал

$$\Pi_1 = \frac{kr^2}{2} \quad (16.41)$$

описывает взаимодействие частицы с силовым центром посредством квазиупругих сил. Потенциалы подобного вида обычно используются в механике и физике для описания моделей пространственных осцилляторов (см. [5], §2.3; [6], 23)). Выраженный через безразмерные координаты частицы, потенциал (16.41) имеет вид:

$$\Pi_1 = \frac{kr_0^2}{2} (\xi^2 + \eta^2). \quad (16.42)$$

В соответствии с этим уравнения (16.39) принимают следующую форму:

$$\begin{aligned} \frac{d^2\xi}{d\tau^2} &= -\omega_1\xi, \\ \frac{d^2\eta}{d\tau^2} &= -\omega_1\eta, \end{aligned} \quad (16.43)$$

где

$$\omega_1 = \frac{kr_0^2}{mv_0^2} \quad (16.44)$$

– параметр подобия, имеющий смысл отношения начальной потенциальной энергии $\Pi_0 = kr_0^2/2$ к начальной кинетической энергии частицы $K_0 = mv_0^2/2$. Параметру ω_1 можно придать также вид начального отношения силы упругости kr_0 к центробежной силе инерции mv_0^2/r_0 , которая действует в неинерциальной системе отсчета на частицу, движущуюся со

скоростью v_0 по окружности радиуса r_0 . Такая интерпретация дает возможность на основе простых рассуждений пояснить характер движения частицы при разных значениях ω_1 .

Из курса теоретической механики известно (например, [6], §2.3), что траектории частиц в полях с потенциалами вида $\Pi \sim r^2$ всегда замкнуты и представляют собой эллипсы, центр которых совпадает с силовым центром. Точки поворота, в которых радиальная скорость обращается в нуль, характеризуются расстояниями от силового центра r_1 , r_2 , определяемым по формулам ([6], с. 80):

$$r_{1,2} = \frac{1}{k} \left(E_0 \mp \sqrt{E_0^2 - \frac{k}{m} N^2} \right), \quad (16.45)$$

Используя введенную выше нормировку координат и времени, а также выражение (16.45), получаем

$$E_0 = \frac{mv_0^2}{2} + \frac{kr_0^2}{2} = K_0 + \Pi_0 = K_0(1 + \omega_1),$$

$$\frac{k}{m} N^2 = \frac{k}{m} (mr_0 v_0)^2 = 4\Pi_0 K_0 = 4K_0 \omega_1.$$

Следовательно, безразмерные полуоси эллипса $\alpha_1 = r_1 / r_0$, $\alpha_2 = r_2 / r_0$ выражаются следующим образом:

$$\alpha_1 = 1, \quad \alpha_2 = \frac{1}{\sqrt{\omega_1}}. \quad (16.46)$$

Безразмерный период обращения, т.е. время τ_1 , через которое частица возвращается в исходную точку, как видно из (16.43), равен

$$\tau_1 = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_1}}. \quad (16.47)$$

Он связан с размерным (истинным) периодом T_1 соотношением $T_1 = \tau_1 r_0 / v_0$.

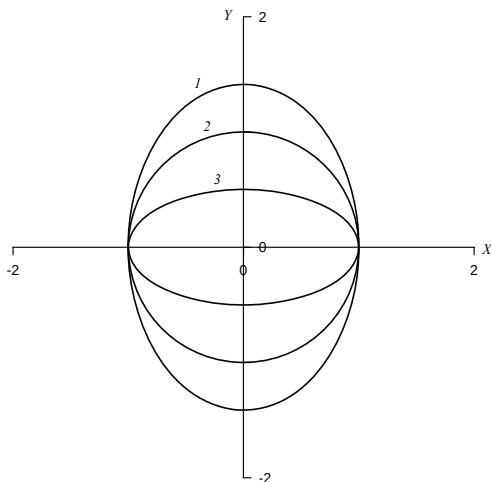


Рис. 16.5

Результаты численного интегрирования уравнений (16.43) методом Рунге-Кутты с шагом $\Delta\tau = \tau_1 / 100$ представлены на рис. 16.5. Там изображены траектории движения частицы, полученные при разных значениях параметра подобия ω_1 : $\omega_1 = 0,5$ (кривая 1); $\omega_1 = 1$ (кривая 2); $\omega_1 = 4$ (кривая 3). Отчетливо видно влияние начальных условий на форму траектории. В частности, когда начальная потенциальная энергия мала по сравнению с кинетической ($\omega_1 < 1$), эллипс вытянут в направлении начальной скорости. Наоборот, при $\omega_1 > 1$ большая полуось эллипса располагается вдоль начального смещения частицы. Случай $\omega_1 = 1$ соответствует движению по окружности (см. также формулы (16.46)).

2. При движении тела малых размеров (материальной точки) на пружине, длина которой в недеформированном состоянии l_0 , потенциальная энергия упругих деформаций запишется как

$$\Pi_2 = \frac{k(r - l_0)^2}{2}. \quad (16.48)$$

Сила упругости $\mathbf{F} = -\text{grad } \Pi_2$ является в этом случае знакопеременной: при $r > l_0$ частица притягивается к центру, при $r < l_0$ – отталкивается.

Потенциал (16.48) выражается через безразмерные координаты следующим образом:

$$\Pi_2 = \frac{kr_0^2}{2} \left[\left(\xi^2 + \eta^2 \right)^{1/2} - \frac{l_0}{r_0} \right]^2. \quad (16.49)$$

Вводя параметры подобия

$$a = \frac{l_0}{r_0}, \quad \omega_2 = \frac{kr_0^2}{mv_0^2}, \quad (16.50)$$

запишем безразмерные уравнения движения частицы:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \xi}{d\tau^2} &= -\omega_2 \xi \left(1 - \frac{a}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}} \right), \\ \frac{d^2 \eta}{d\tau^2} &= -\omega_2 \eta \left(1 - \frac{a}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}} \right). \end{aligned} \quad (16.51)$$

Отметим, что хотя параметр ω_2 совпадает по форме с (16.44), его интерпретация иная, поскольку величина kr_0^2 уже не связана непосредственно с начальной потенциальной энергией $(\Pi_2)_0 = k(r_0 - l_0)^2 / 2$. Для установления смысла параметра ω_2 воспользуемся выражением для периода свободных колебаний тела массой m на пружине жесткостью k , а именно $T_2 = 2\pi\sqrt{m/k}$. Учитывая нормировку времени $t_0 = r_0 / v_0$, находим, что безразмерный период свободных колебаний τ_2 равен

$$\tau_2 = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_2}}.$$

Траекторию движения частицы в поле с потенциалом Π_2 можно представить в виде суперпозиции вращательного движения точки по некоторой замкнутой кривой и колебаний относительно этой кривой. В общем случае траектория точки не замкнута, поэтому говорить строго о периоде обращения нельзя. Однако можно ввести понятие квазипериода, поскольку движение в этом поле всегда финитно.

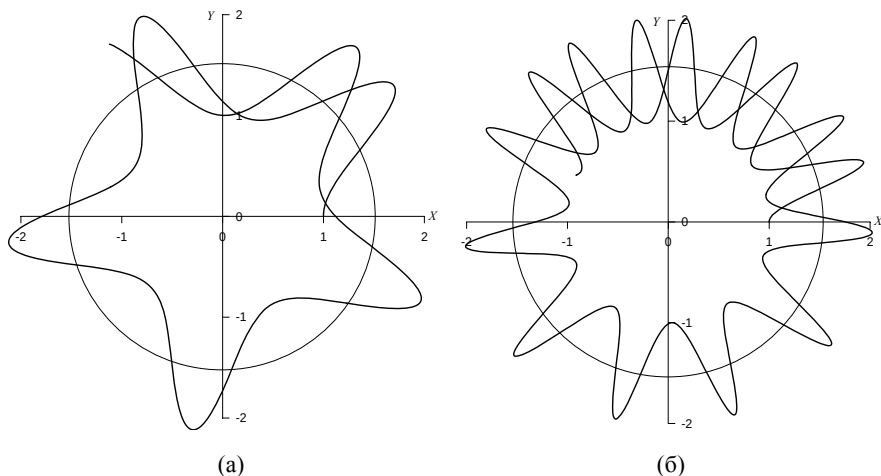


Рис. 16.6

Из простых соображений ясно, что с ростом параметра ω_2 квазипериод обращения будет возрастать. В самом деле, при фиксированной жесткости пружины k увеличение ω_2 означает уменьшение начальной скорости частицы, т.е. ее кинетической энергии. Одновременно уменьшается период колебаний частицы, поэтому с ростом ω_2 колебательное движение будет преобладать над вращательным движением частицы вокруг силового центра.

Приведенные выше соображения подтверждаются результатами численного интегрирования системы уравнений (16.51). На рис. 16.6 изображены траектории частицы, полученные методом Рунге-Кутты с шагом $\Delta\tau = \tau_2 / 100$ для следующих значений параметров подобию: $a = 1,5$; $\omega_2 = 5$ (рис. 16.6, а) и $a = 1,5$; $\omega_2 = 30$ (рис. 16.6, б). (Пунктирными окружностями

на этих рисунках отмечена длина недеформированной пружины). Видно, что движению частицы вокруг центра сопутствуют ярко выраженные радиальные колебания, частота которых возрастает с увеличением ω_2 .

3. Особый интерес представляет движение частицы в поле с классическим кулоновским потенциалом

$$\Pi_3 = -\frac{A}{r}. \quad (16.52)$$

В случае электростатического поля, создаваемого неподвижным зарядом Q , константа взаимодействия $A = -qQ / (4\pi\epsilon_0)$, где q – заряд движущейся частицы, ϵ_0 – электрическая постоянная; в случае гравитационного поля, создаваемого неподвижной массой M , константа $A = GMm$, где G – гравитационная постоянная.

При $A < 0$ взаимодействие носит характер отталкивания от центра, при $A > 0$ – притяжения к центру. Ограничимся в дальнейшем случаем $A > 0$, как приводящем к большему разнообразию типов движения.

В безразмерных координатах кулоновский потенциал записывается как

$$\Pi_3 = -\frac{A}{r_0(\xi^2 + \eta^2)^{1/2}}. \quad (16.53)$$

Уравнения движения имеют вид:

$$\begin{aligned} \frac{d^2\xi}{d\tau^2} &= -\omega_3 \frac{\xi}{(\xi^2 + \eta^2)^{3/2}}, \\ \frac{d^2\eta}{d\tau^2} &= -\omega_3 \frac{\eta}{(\xi^2 + \eta^2)^{3/2}}, \end{aligned} \quad (16.54)$$

где

$$\omega_3 = \frac{A}{r_0 m v_0^2} \quad (16.55)$$

– параметр подобия, имеющий смысл отношения модуля начальной потенциальной энергии A/r_0 к удвоенной начальной кинетической энергии mv_0^2 .

Из курса теоретической механики известно ([5], §2.4), что траектории частицы, движущейся в поле с потенциалом Π_3 , представляют собой кривые второго порядка.

Если полная энергия $E_0 \geq 0$, то движение инфинитно, причем при $E_0 > 0$, что соответствует значениям параметра $\omega_3 < 0,5$, траектория частицы – гипербола, при $E_0 = 0$ ($\omega_3 = 0,5$) – парабола.

Движение частицы с отрицательной полной энергией ($E_0 < 0$, $\omega_3 > 0,5$) финитно. Траектории частицы представляют собой эллипсы, у которых один из фокусов совпадает с центром (первый закон Кеплера). Полуоси эллипсов рассчитываются по формулам ([5], §2.4):

$$a_1 = \frac{A}{2|E_0|}, \quad a_2 = \frac{N}{\sqrt{2m|E_0|}}. \quad (16.56)$$

Соответствующие им безразмерные величины имеют вид:

$$\alpha_1 = \frac{a_1}{r_0} = \frac{\omega_3}{2\omega_3 - 1}, \quad \alpha_2 = \frac{a_2}{r_0} = \frac{1}{\sqrt{2\omega_3 - 1}}. \quad (16.57)$$

Период обращения частицы по эллиптической орбите равен

$$T_3 = 2\pi \sqrt{\frac{m}{A}} a_1^{3/2}. \quad (16.58)$$

Безразмерный период выражается через параметр подобия следующим образом:

$$\tau_3 = \frac{v_0}{r_0} T_3 = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_3}} \alpha_1^{3/2}. \quad (16.59)$$

Результаты численного интегрирования системы уравнений (16.54) методом Рунге-Кутты с шагом $\Delta\tau = \tau_3 / 100$ представлены на рис. 16.7. Там

изображены траектории частицы, полученные при следующих значениях параметра подобия: $\omega_3 = 0,5$ (кривая 1); $\omega_3 = 0,6$ (кривая 2); $\omega_3 = 0,75$ (кривая 3); $\omega_3 = 1$ (кривая 4); $\omega_3 = 1,5$ (кривая 5).

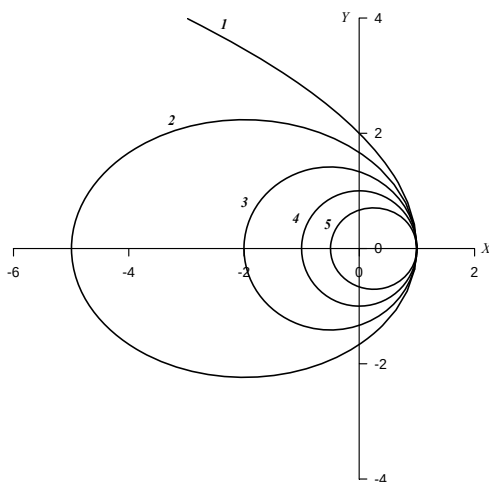


Рис. 16.7

Видно, что характер движения частицы и тип траектории действительно однозначно определяются параметром ω_3 . При равенстве абсолютных начальных значений потенциальной и кинетической энергии ($\omega_3 = 0,5$) движение происходит по параболе. При $\omega_3 > 0,5$ (начальная кинетическая энергия мала по сравнению с A/r_0) движение становится финитным, траектории частицы – эллипсы с силовым центром, расположенным в одном из фокусов. Частный случай $\omega_3 = 1$ соответствует движению по окружности. При $0,5 < \omega_3 < 1$ силовой центр совпадает с ближним от начальной точки частицы фокусом эллиптической орбиты, при $\omega_3 > 1$ – с дальним фокусом.

4. Потенциал

$$\Pi_4 = -\frac{A}{r^{1+\delta}} \quad (16.60)$$

используется в ряде теоретических моделей, например, при описании межмолекулярных и внутримолекулярных взаимодействий ([5, 6]) и т.п. Кроме того, этот потенциал представляет методический интерес, поскольку позволяет в наглядной форме подчеркнуть фундаментальность кулоновского потенциала $\Pi_3 = -A/r$. Из теории известно, что траектории частицы в поле с потенциалом Π_4 при $\delta \neq 0$ незамкнуты, даже если движение финитно. Сколь угодно малое отличие δ от нуля приводит к прецессии (вращению) эллиптической орбиты, т.е. эффекту, имеющему во многих случаях принципиальное значение.

В безразмерных координатах потенциал Π_4 записывается следующим образом:

$$\Pi_4 = -\frac{A}{r_0^{1+\delta}(\xi^2 + \eta^2)^{1/2+\delta/2}}. \quad (16.61)$$

Безразмерные уравнения движения имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{d^2\xi}{d\tau^2} &= -\omega_4(1+\delta) \frac{\xi}{(\xi^2 + \eta^2)^{3/2+\delta/2}}, \\ \frac{d^2\eta}{d\tau^2} &= -\omega_4(1+\delta) \frac{\eta}{(\xi^2 + \eta^2)^{3/2+\delta/2}}, \end{aligned} \quad (16.62)$$

где один из параметров подобия, а именно

$$\omega_4 = \frac{A}{r_0^{1+\delta} m v_0^2}, \quad (16.63)$$

имеет, как и Π_3 , смысл отношения модуля начальной потенциальной энергии к удвоенной начальной кинетической энергии. Вторым параметром подобия является δ .

Определение условий финитности или инфинитности движения в зависимости от значений двух параметров подобия δ и ω_4 в общем виде затруднительно и выходит за рамки нашего рассмотрения. Отметим лишь, что общая методика нахождения границ движения заключается в анализе зависимости так называемого эффективного потенциала

$$\Pi_{eff} = \Pi(r) + \frac{N^2}{2mr^2}$$

от радиуса r ([5], §2.3; [6], §14). Значения $r_{\min}$ и $r_{\max}$, при которых выполняется равенство $\Pi_{eff} = E_0$, определяют границы изменения расстояния от силового центра до частицы при ее движении. Траектории частицы бесчисленное число раз касаются окружностей радиусов $r_{\min}$ и $r_{\max}$ и за бесконечное время заполняют все кольцо между ними.

Численное интегрирование уравнений (16.62) проводилось, как и ранее, методом Рунге-Кутты. Однако нужно заметить, что априорный выбор шага интегрирования Δt в данной задаче вызывает трудности, так как при некоторых значениях δ и ω_4 скорость движения частицы по траектории сильно изменяется. Исходя требования, чтобы максимальное безразмерное смещение частицы за шаг Δt не превышало 0,05, была эмпирически установлена следующая, достаточно надежная оценка: $\Delta t \leq 2\pi / (300\sqrt{\omega_4})$, которая и использовалась в расчетах

Результаты численного анализа представлены на рис. 16.8 и 16.9. На рис. 16.8 изображены траектории частицы при $\omega_4 = 1$ и положительных значениях δ : $\delta = 0,1$ (рис. 16.8, а) и $\delta = 0,3$ (рис. 16.8, б). На рис. 16.9 приведены траектории частицы при $\omega_4 = 1$ и отрицательных δ : $\delta = -0,1$ (рис. 16.9, а) и $\delta = -0,3$ (рис. 16.9, б).

Обращают на себя внимание следующие закономерности. Когда $|\delta| \ll 1$, финитную траекторию можно интерпретировать как прецессирующий (вращающийся) эллипс, причем при $\delta > 0$ направление прецессии совпадает с направлением движения частицы, при $\delta < 0$ — противоположно.

Таким образом, сколь угодно малые отличия показателя степени r в функции $1/r$ от единицы можно зарегистрировать, наблюдая в течение достаточного времени движение уединенной материальной точки в исследуемом поле. Замкнутость траекторий, с высокой точностью установленная для потенциала $\Pi_3 = -A/r$, убедительно свидетельствует о его фундаментальности.

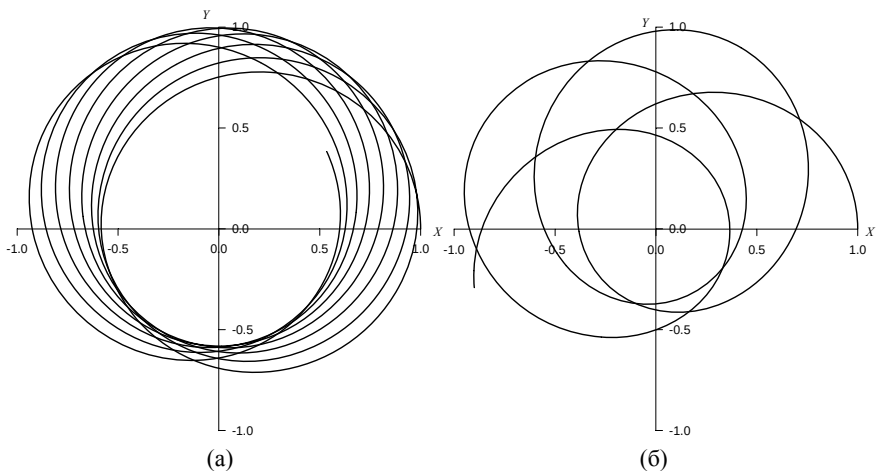


Рис. 16.8

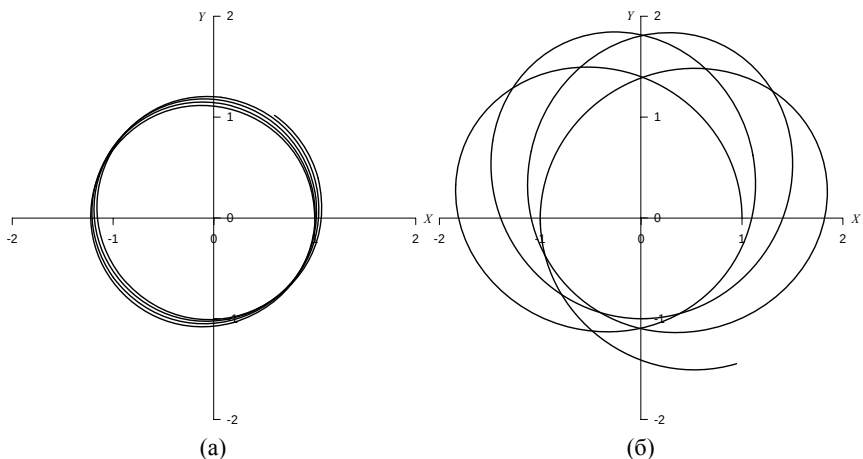


Рис. 16.9

С ростом $\delta > 0$ сила притяжения к силовому центру при малых r увеличивается, но взаимодействие становится "короткодействующим" (сила быстро убывает с расстоянием). Наоборот, с уменьшением $\delta < 0$ притяжение вблизи центра становится слабее, но медленнее убывает при удалении от него. Указанные закономерности отражаются на характере траекторий частицы, которые можно видеть на рис. 16.8, б и 16.9, б.

Пример 16.3. Два грузика одинаковой массой m связаны невесомой нерастяжимой нитью, перекинутой через блок пренебрежимо малой массы, который может вращаться без трения (рис. 16.10). Левый грузик отклонили на некоторый угол φ в плоскости рисунка и отпустили. Правый грузик может перемещаться только вертикально. Радиус блока R_0 достаточно мал, так что изменением длины r левого отрезка нити за счет перемещения точки схода нити с блока можно пренебречь ($R_0 \varphi \ll r$). Определить, как будет двигаться левый грузик, когда систему предоставят самой себе.

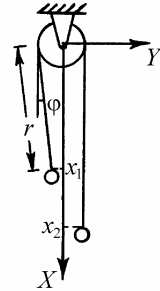


Рис. 16.10

Анализ. Уравнение связи, накладываемой нитью длиной l на положение грузиков, имеет вид:

$$r + x_2 + \pi R_0 - l = R_0 \varphi \approx 0, \quad (16.64)$$

Система имеет две степени свободы. В качестве обобщенных координат выберем r и φ . Формулы преобразования от обобщенных координат к декартовым таковы:

$$x_1 = r \cos \varphi, \quad y_1 = -R_0 + r \sin \varphi, \quad x_2 = (l - \pi R_0) - r. \quad (16.65)$$

Записываем кинетическую энергию системы:

$$K = \frac{m(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2)}{2} + \frac{m\dot{x}_2^2}{2} = m \frac{\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2}{2} + m \frac{\dot{r}^2}{2} = 2m \frac{\dot{r}^2}{2} + m \frac{r^2 \dot{\varphi}^2}{2}.$$

Потенциальная энергия равна

$$\Pi = -mgx_1 - mgx_2 = -mgr \cos \varphi + mgr - mg(l - \pi R_0) .$$

Лагранжиан системы имеет вид:

$$L = 2m \frac{\dot{r}^2}{2} + m \frac{r^2 \dot{\varphi}^2}{2} - mgr + mgr \cos \varphi . \quad (16.66)$$

Записываем уравнения Лагранжа

$$\begin{aligned} 2m\ddot{r} - mr\dot{\varphi}^2 + mg - mg \cos \varphi &= 0, \\ mr(2\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}) + mgr \sin \varphi &= 0. \end{aligned} \quad (16.67)$$

Введем безразмерные переменные

$$\rho = \frac{r}{r_0}, \quad \tau = \omega_0 t, \quad (16.68)$$

где $r_0 = r(0)$, $\omega_0 = \sqrt{g/r_0}$ и сведем (16.67) к системе уравнений первого порядка:

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{d\tau} &= \xi, \\ \frac{d\varphi}{d\tau} &= \eta, \\ \frac{d\xi}{d\tau} &= \frac{1}{2}(\cos \varphi - 1) + \frac{1}{2}\rho\eta^2, \\ \frac{d\eta}{d\tau} &= -\frac{1}{\rho} \sin \varphi - \frac{2}{\rho} \xi\eta. \end{aligned} \quad (16.69)$$

Начальные условия для безразмерных переменных имеют вид:

$$\rho(0) = 1, \quad \varphi(0) = \varphi_0, \quad \xi(0) = 0, \quad \eta(0) = \eta_0. \quad (16.70)$$

Результаты численного интегрирования системы уравнений (16.69) с шагом $\Delta t = 2\pi/100$ представлены на рис. 16.11 для двух значений начального угла отклонения левого грузика: $\varphi_0 = 0,1$ (кривая 1) и $\varphi_0 = 0,5$ (кривая 2) при начальной скорости $\eta_0 = 0$. Там изображены траектории движения левого грузика на плоскости переменных ρ, φ .

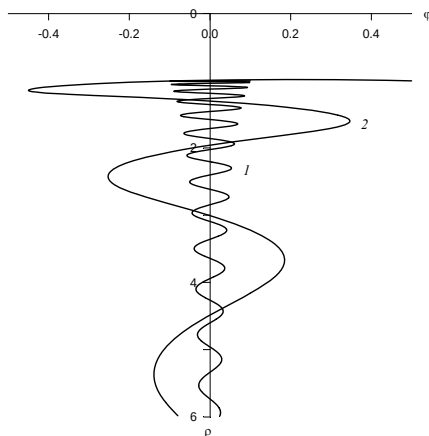


Рис. 16.11

Видно, что раскачиваясь, левый грузик совершает сложное движение: угол его отклонения уменьшается, а длина левого отрезка нити возрастает, одновременно правый грузик поднимается вверх. Раскачивающийся грузик "перевешивает" такой же грузик, висящий на вертикальной нити, причем этот эффект тем заметнее, чем больше начальный угол отклонения шарика. Аналогичная картина наблюдается, если неотклоненному левому грузику ($\varphi_0 = 0$) сообщить начальную скорость η_0 в горизонтальном направлении (рис. 16.12: $\eta_0 = 0,1$ (кривая 1) и $\eta_0 = 0,5$ (кривая 2)).

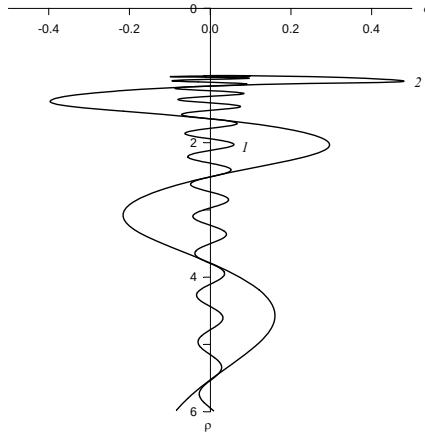


Рис. 16.12

Пример 16.4. Исследовать колебания плоского математического маятника, нить которого изменяет свою длину со временем по закону $l = l_0 + v_0 t$, где $v_0 = \text{const}$. Рассмотреть случаи, когда $v_0 > 0$ (нить удлиняется) и $v_0 < 0$ (нить укорачивается).

Анализ. Уравнение движения маятника имеет вид (см. задачу 11.8):

$$\ddot{\phi} + \frac{2V_0}{l_0 + v_0 t} \dot{\phi} + \frac{g}{l_0 + v_0 t} \sin \phi = 0. \quad (16.71)$$

Выберем в качестве масштаба времени величину

$$T = \frac{l_0}{|v_0|}$$

и введем безразмерное время τ по формуле

$$\tau = \frac{t}{T} = \frac{|v_0| t}{l_0}. \quad (16.72)$$

В результате замены t на τ уравнение (16.71) распадается на два безразмерных уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{d^2\varphi}{d\tau^2} + \frac{2}{1+\tau} \cdot \frac{d\varphi}{d\tau} + \frac{\beta^2}{1+\tau} \sin \varphi &= 0 \quad \text{ї ðè } v_0 > 0, \\ \frac{d^2\varphi}{d\tau^2} - \frac{2}{1-\tau} \cdot \frac{d\varphi}{d\tau} + \frac{\beta^2}{1-\tau} \sin \varphi &= 0 \quad \text{ї ðè } v_0 < 0, \end{aligned} \quad (16.73)$$

где $\beta = \omega_0 T$ – параметр подобия задачи, $\omega_0 = \sqrt{g/l_0}$ – характерная частота. Параметру β можно придать следующий наглядный смысл:

$$\beta = 2\pi N,$$

где N – число полных колебаний, совершаемых маятником постоянной длины l_0 за время $T = l_0/|v_0|$. Следовательно, быстрому изменению длины нити соответствуют малые значения параметра β , а медленному – большие.

Сводя (16.73) к системам уравнений первого порядка, получаем:

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{d\tau} &= \psi, \\ \frac{d\psi}{d\tau} &= -\frac{2}{1+\tau} \psi - \frac{\beta^2}{1+\tau} \sin \varphi = 0 \quad \text{ї ðè } v_0 > 0, \\ \frac{d\psi}{d\tau} &= \frac{2}{1-\tau} \psi - \frac{\beta^2}{1-\tau} \sin \varphi = 0 \quad \text{ї ðè } v_0 < 0. \end{aligned} \quad (16.74)$$

Начальные условия имеют вид:

$$\varphi(0) = \varphi_0, \quad \psi(0) = \psi_0. \quad (16.75)$$

Рассмотрим движение маятника при следующих начальных условиях:

$$\varphi_0 = 0, 1; \quad \psi_0 = 0.$$

Результаты численного интегрирования системы (16.74) с шагом $\Delta\tau = 0,005$ приведены на рис. 16.13 для случая удлиняющейся нити ($v_0 > 0$) и на рис. 16.14 для случая укорачивающейся нити ($v_0 < 0$). Там изображены зависимости угла отклонения маятника φ от времени τ , полученные при $\beta = 100$ (кривые 1) и при $\beta = 10$ (кривые 2).

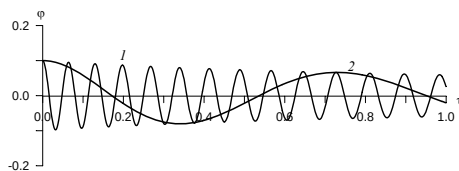


Рис. 16.13

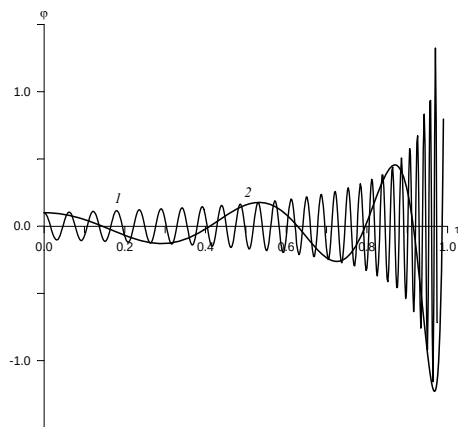


Рис. 16.14

Когда длина нити увеличивается, движения маятника носят характер затухающих колебаний с уменьшающейся частотой. По иному выглядят движения маятника, когда нить укорачивается. Вначале угловая амплитуда и частота колебаний маятника увеличиваются. Затем наступает момент, когда угол φ начинает расти монотонно (на рисунках в этот момент кривые прерываются). На смену колебаниям приходит вращение маятника вокруг точки подвеса с нарастающей угловой скоростью.

Пример 16.5. Исследовать движение двойного плоского маятника (рис. 16.15) при произвольных начальных отклонениях. Численные решения сравнить с аналитическими решениями, полученными в задаче 13.5 при малых отклонениях маятника.

Анализ. Лагранжиан системы имеет вид (см. задачу 13.5 и формулу (13.27)):

$$L = ml^2 \left(\dot{\beta}_1^2 + \frac{\dot{\beta}_2^2}{2} + \dot{\beta}_1 \dot{\beta}_2 \cos(\beta_1 - \beta_2) \right) - 2mgl(1 - \cos \beta_1) - mgl(1 - \cos \beta_2). \quad (16.76)$$

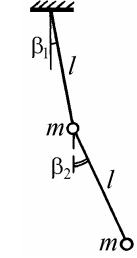


Рис. 16.15

Запишем уравнения Лагранжа:

$$\begin{aligned} 2\ddot{\beta}_1 + \ddot{\beta}_2 \cos(\beta_1 - \beta_2) + \dot{\beta}_2^2 \sin(\beta_1 - \beta_2) + 2\frac{g}{l} \sin \beta_1 &= 0, \\ \ddot{\beta}_1 \cos(\beta_1 - \beta_2) + \ddot{\beta}_2 - \dot{\beta}_1^2 \sin(\beta_1 - \beta_2) + 2\frac{g}{l} \sin \beta_2 &= 0. \end{aligned} \quad (16.77)$$

В отличие от линеаризованных уравнений (13.28), эти уравнения справедливы при любых углах отклонения маятников β_1 и β_2 . Введем безразмерное время τ по формуле

$$\tau = \omega_0 t, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}} \quad (16.78)$$

и сведем систему (16.77) к четырем уравнениям первого порядка:

$$\begin{aligned} \frac{d\beta_1}{d\tau} &= \psi_1, \\ \frac{d\beta_2}{d\tau} &= \psi_2, \\ 2\frac{d\psi_1}{d\tau} + \frac{d\psi_2}{d\tau} \cos(\beta_1 - \beta_2) &= -\psi_2^2 \sin(\beta_1 - \beta_2) - 2\sin \beta_1, \\ \frac{d\psi_2}{d\tau} \cos(\beta_1 - \beta_2) + \frac{d\psi_1}{d\tau} &= \psi_1^2 \sin(\beta_1 - \beta_2) - \sin \beta_2. \end{aligned} \quad (16.79)$$

Последние два уравнения системы (16.79) нужно разрешить относительно $d\psi_1/d\tau$ и $d\psi_2/d\tau$. В итоге получаем:

$$\begin{aligned}\frac{d\beta_1}{d\tau} &= \psi_1, \\ \frac{d\beta_2}{d\tau} &= \psi_2, \\ \frac{d\psi_1}{d\tau} &= \frac{1}{1 + \sin^2(\beta_1 - \beta_2)} \left\{ -\sin(\beta_1 - \beta_2) [\psi_1^2 \cos(\beta_1 - \beta_2) + \psi_2^2] - \right. \\ &\quad \left. - 2 \sin \beta_1 + \sin \beta_2 \cos(\beta_1 - \beta_2) \right\}, \\ \frac{d\psi_2}{d\tau} &= \frac{2}{1 + \sin^2(\beta_1 - \beta_2)} \left\{ \sin(\beta_1 - \beta_2) \left[\psi_1^2 + \frac{1}{2} \psi_2^2 \cos(\beta_1 - \beta_2) \right] + \right. \\ &\quad \left. - \sin \beta_1 \cos(\beta_1 - \beta_2) - \sin \beta_2 \right\}.\end{aligned}\tag{16.80}$$

Начальные условия в общем случае имеют вид:

$$\beta_1(0) = \beta_{10}, \quad \beta_2(0) = \beta_{20}, \quad \psi_1(0) = \psi_{10}, \quad \psi_2(0) = \psi_{20}.\tag{16.81}$$

Система уравнений (16.80) интегрировалась методом Рунге-Кутты с шагом $\Delta\tau = 2\pi/100$. Рассмотрены движения маятника из отклоненного положения без начальной скорости:

$$\psi_{10} = 0, \quad \psi_{20} = 0,$$

причем для начальных значений углов β_{10} , β_{20} использованы соотношения, соответствующие нормальным колебаниям в линейном случае (см. задачу 13.5) и называемые собственными формами:

$$\beta_{20} = \sqrt{2}\beta_{10}, \quad \beta_{20} = -\sqrt{2}\beta_{10}.$$

Результаты расчета колебаний двойного маятника при $\beta_{10} = 0,5$ рад представлены на рис. 16.16, а, б. Видно, что даже при довольно больших начальных отклонениях ($\beta_{10} = 28^\circ 38'$, $\beta_{20} = \pm 40^\circ 30'$) колебания маятника являются почти гармоническими, причем соотношения между амплитудами колебаний верхнего и нижнего маятников практически постоянны во времени.

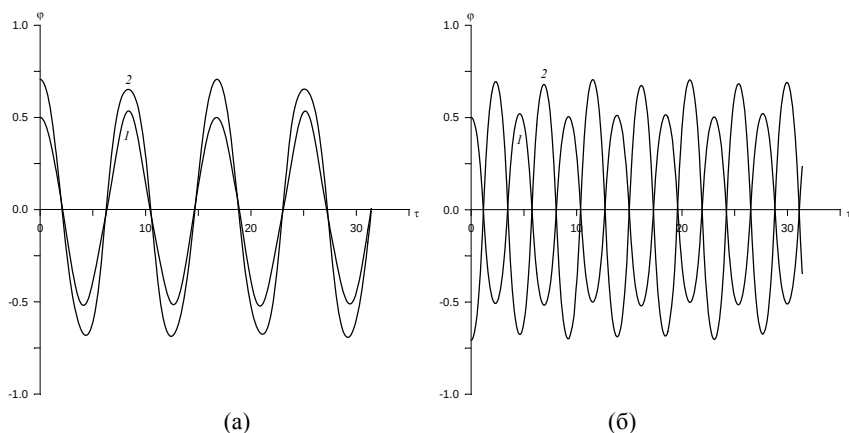


Рис. 16.16

При увеличении β_{10} (и, соответственно, $|\beta_{20}| = \sqrt{2}\beta_{10}$) движение маятника приобретает более сложный характер. Результаты расчета при $\beta_{10} = 1$ рад ($\beta_{10} = 57^\circ 17'$, $\beta_{20} = \pm 81^\circ$) изображены на рис. 16.17, а, б. Хотя соотношения между β_{10} и β_{20} (формы начальных отклонений) такие же, как и в предыдущем случае, движение становится качественно иным – непериодическим. Меняются во времени не только сами амплитуды верхнего и нижнего маятников, но и соотношения между ними. Мы видим, что понятие собственной формы колебаний как свойства данной системы в случае нелинейных колебаний теряет смысл. Вместе с тем, для произвольного β_{10} по-видимому можно опытным путем подобрать такие β_{20} , при которых движения в системе станут периодическими (но не гармоническими), а соотношения между амплитудами маятников – не меняющимися во времени.

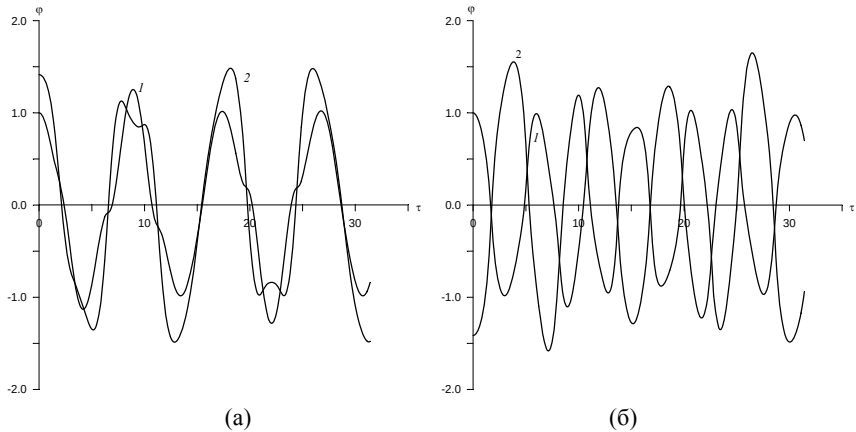


Рис. 16.17

Пример 16.6. Исследовать свободное вращение однородного сплошного параллелепипеда вокруг центра масс (рис. 16.18).

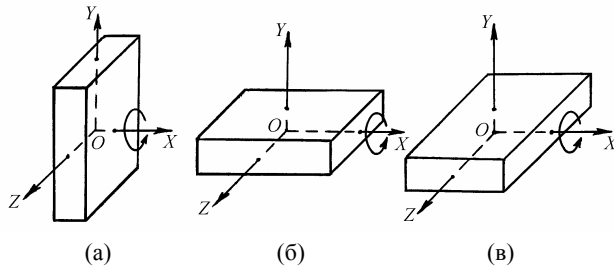


Рис. 16.18

Анализ. Наиболее удобный и эффективный способ описания вращения твердого тела, имеющего одну неподвижную точку, состоит в переходе в неинерциальную систему отсчета, координатные оси которой жестко связаны с твердым телом и направлены вдоль главных осей инерции. Записывая уравнение моментов $\dot{\mathbf{N}} = \mathbf{M}$ на оси вращающейся вместе с телом системы координат, приходим к уравнениям Эйлера (9.13):

$$\begin{aligned}
I_x \frac{d\omega_x}{dt} + \omega_y \omega_z (I_z - I_y) &= M_x, \\
I_y \frac{d\omega_y}{dt} + \omega_z \omega_x (I_x - I_z) &= M_y, \\
I_z \frac{d\omega_z}{dt} + \omega_x \omega_y (I_y - I_x) &= M_z,
\end{aligned} \tag{16.82}$$

где I_x, I_y, I_z – главные моменты инерции твердого тела относительно соответствующих координатных осей, $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ – проекции угловой скорости вращения тела на координатные оси подвижной системы, M_x, M_y, M_z – проекции момента внешних сил. Система (16.82) нелинейных уравнений первого порядка относительно проекций угловой скорости $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ дополняется начальными условиями

$$\omega_x(0) = \omega_{x0}, \quad \omega_y(0) = \omega_{y0}, \quad \omega_z(0) = \omega_{z0}, \tag{16.83}$$

задающими величину и направление вектора $\boldsymbol{\omega}$ относительно вращающегося тела в начальный момент времени (при $t = 0$).

Если момент внешних сил $\mathbf{M}$ равен нулю, то твердое тело совершает свободное вращение в пространстве, причем вектор момента импульса тела $\mathbf{N}$ сохраняет в пространстве постоянное направление. Однако, как нетрудно видеть из уравнений (16.82), даже при $M_x = M_y = M_z = 0$ проекции угловой скорости $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ меняются, вообще говоря, со временем.

Это означает, что вектор угловой скорости, совпадающий по направлению с мгновенной осью вращения, меняет ориентацию как относительно тела, так и относительно неподвижной системы отсчета. Следовательно, произвольно закрученной твердое тело, будучи предоставленным самому себе, совершает сложное движение.

Представляет интерес исследовать движение тела в том случае, когда начальная угловая скорость направлена по отношению к какой-либо главной оси инерции под малым углом. При проведении анализа будем считать, что тело получает преимущественное вращение вокруг оси OX , вмещающая эту ось поочередно с разными главными осями (рис. 16.18, *a, б, в*).

Выберем в качестве масштаба времени величину $T = 1/\omega_{x0}$. Вводя безразмерные моменты инерции $\tilde{I}_x = 1$, $\tilde{I}_y = I_y/I_x$, $\tilde{I}_z = I_z/I_x$ и безразмерные проекции угловой скорости $\Omega_x = \omega_x/\omega_{x0}$, $\Omega_y = \omega_y/\omega_{x0}$, $\Omega_z = \omega_z/\omega_{x0}$, получаем:

$$\begin{aligned}\frac{d\Omega_x}{d\tau} &= \Omega_y\Omega_z(\tilde{I}_y - \tilde{I}_z), \quad \Omega_x(0) = 1, \\ \frac{d\Omega_y}{d\tau} &= \Omega_z\Omega_x(\tilde{I}_z - 1)/\tilde{I}_y, \quad \Omega_y(0) = \Omega_{y0} \ll 1, \\ \frac{d\Omega_z}{d\tau} &= \Omega_x\Omega_y(1 - \tilde{I}_y)/\tilde{I}_z, \quad \Omega_z(0) = \Omega_{z0} \ll 1,\end{aligned}\tag{16.84}$$

где $\tau = \omega_{x0} t$. Результаты численного интегрирования системы (16.84) с шагом $\Delta\tau = 2\pi/100$ представлены на рис. 16.19 – 16.21. Там приведены расчетные зависимости компонент угловой скорости Ω от времени при очередном закручивании тела вокруг трех главных осей инерции. Малые значения компонент угловой скорости по осям OY и OZ имитируют в расчетной модели неточности задания начальных условий, всегда существующие в действительности.

Рис. 16.19 относится к случаю, когда тело закручивают вокруг оси, соответствующей наибольшему моменту инерции (рис. 16.18, а): $\tilde{I}_x = 1$; $\tilde{I}_y = 0,25$; $\tilde{I}_z = 0,4$. Видно, что компоненты угловой скорости Ω_y , Ω_z осциллируют с небольшими амплитудами, а Ω_x практически постоянна. Следовательно, тело совершает в этом случае почти плоское движение, слегка покачиваясь при вращении.

Аналогично ведет себя тело при закручивании вокруг оси, соответствующей наименьшему моменту инерции (рис. 16.18, б): $\tilde{I}_x = 1$; $\tilde{I}_y = 4$; $\tilde{I}_z = 2$). Зависимости $\Omega_x(\tau)$, $\Omega_y(\tau)$, $\Omega_z(\tau)$ для этого случая изображены на рис. 16.20.

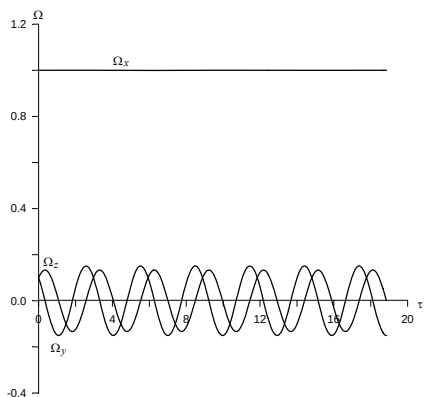


Рис. 16.19

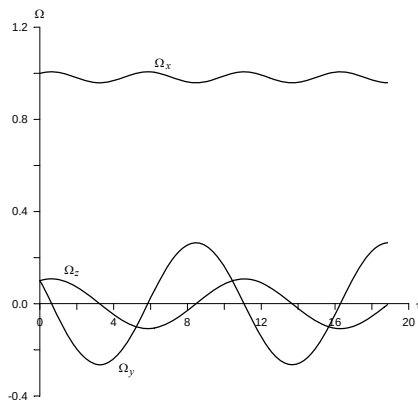


Рис. 16.20

Если закрутить тело вокруг оси, соответствующей среднему по величине моменту инерции (рис. 16.18, ϵ : $\tilde{I}_x = 1$; $\tilde{I}_y = 2$; $\tilde{I}_z = 0,25$), то, как видно из рис. 16.21, тело начинает кувыркаться. Все компоненты угловой скорости сильно изменяются по величине, а Ω_x и Ω_y даже меняют знак: в некоторые моменты времени тело вращается вокруг осей OX и OY в противоположном направлении. Такое поведение тела, совершающего в данном случае существенно неплоское движение, отражает тот известный факт, что вращение вокруг оси, соответствующей среднему по величине моменту инерции, является неустойчивым.

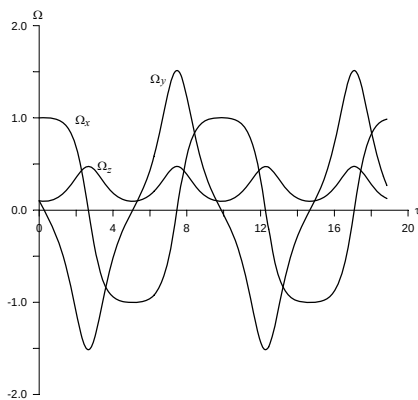


Рис. 16.21

§17. Задачи повышенной трудности

17.1. С какой минимальной скоростью v_0 нужно бросить камень, чтобы он перелетел через дом, имеющий форму прямоугольного параллелепипеда высотой $h = 9$ м и шириной $l = 6$ м? Под каким углом α к горизонту нужно совершить этот бросок? На какое расстояние a нужно подойти к стене дома для этого броска? Считать, что бросок производится от поверхности земли.

17.2. Собака, находящаяся на расстоянии $L = 28$ м от прямой тропинки, заметила движущегося по ней навстречу велосипедиста и побежала, держа курс все время прямо на него. На какое наименьшее расстояние a сможет приблизиться к велосипедисту собака, если их скорости одинаковы, а первоначальное расстояние между ними было $D = 100$ м?

17.3. Равносторонний треугольник ABC скользит плашмя по горизонтальному столу (рис. 17.1). Известно, что в некоторый момент времени точка A имеет скорость $v_1 = \sqrt{6}$ м/с $\approx 2,45$ м/с, точка B имеет скорость $v_2 = 1,5$ м/с, а скорость центра треугольника направлена параллельно стороне CB . Какова величина скорости v_0 центра треугольника в этот момент времени?

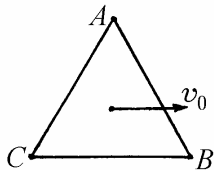


Рис. 17.1

17.4. Маленькое тело брошено вертикально вверх с начальной скоростью v_0 . Считая, что сила сопротивления воздуха пропорциональна скорости тела и коэффициент сопротивления равен β , найти высоту h подъема тела от точки броска до верхней точки траектории. Какое время τ будет продолжаться подъем тела до верхней точки?

17.5. Автомобиль движется с постоянной скоростью по горизонтальной дороге, имеющей форму эллипса с полуосями A и B . Какую максимальную

скорость может развить автомобиль, чтобы не было заноса, если коэффициент трения между шинами автомобиля и покрытием дороги μ ? Для оценок положить: $A = 100$ м, $B = 50$ м, $\mu = 0,5$.

17.6. На горизонтальном столе покоится клин массой M (рис. 17.2). Сверху на клин падает гладкий шарик массой m . Определить угол при основании клина α , если известно, что после упругого удара о клин шарик отскочил под углом β к вертикали, а клин начал двигаться поступательно. Трением пренебречь.

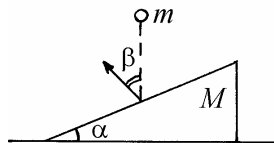


Рис. 17.2

17.7. Два одинаковых шара радиусами R летят навстречу друг другу с одинаковыми скоростями как показано на рис. 17.3. Расстояние между линиями движения центров шаров $S = R$. На какой угол β повернется вектор скорости каждого из шаров после удара? Удар считать упругим, шары – идеально гладкими.

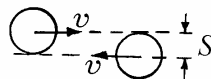


Рис. 17.3

17.8. Космический корабль движется с постоянной по величине скоростью v . Для изменения направления полета включается навигационный двигатель, выбрасывающий струю газа с относительной скоростью v_0 перпендикулярно траектории корабля. Определить угол α , на который повернется вектор скорости корабля, если его начальная масса m_0 , а масса топлива, израсходованного на поворот, m . Для оценок положить $v = 10$ км/с, $v_0 = 2$ км/с, $m_0 = 100$ т, $m = 100$ кг.

17.9. Ракета начинает разгоняться в свободном пространстве из состояния покоя, выбрасывая реактивную струю с относительной скоростью $v_0 = 3$ км/с. Найти отношение кинетической энергии ракеты к кинетической энергии реактивной струи в момент, когда ракета достигнет скорости $v_{\text{кон}} = 12$ км/с.

17.10. Ракета начинает разгоняться в свободном пространстве из состояния

покоя, выбрасывая продукты сгорания с относительной скоростью v_0 . При какой скорости ракеты v ее кинетическая энергия максимальна?

17.11. С поверхностей Земли и Луны вертикально вверх стартуют одинаковые ракеты, имеющие начальную массу $m_0 = 100$ т. Найти и сравнить скорости этих ракет, которые они приобретут относительно планет спустя 10 секунд после старта. Скорости выбрасывания газов v_0 у ракет одинаковы и равны 2 км/с. Расход топлива μ также одинаков и равен 1 т/с. Гравитационные поля Земли и Луны считать однородными. Ускорение свободного падения у поверхности Луны $g_E = 1,6 \text{ м/с}^2$.

17.12. Космический зонд, совершающий мягкую посадку на Марс, висит над его поверхностью. По какому закону $\mu = \mu(t)$ должен меняться расход топлива, чтобы зонд оставался неподвижным? Какое количество топлива m израсходует двигатель зонда за время t_0 ? Масса зонда в начале зависания $m_0 = 1$ т, относительная скорость выбрасывания газов двигателем $v_0 = 2$ км/с, ускорение свободного падения у поверхности Марса $g = 3,7 \text{ м/с}^2$, $t_0 = 1$ мин.

17.13. Определить коэффициент полезного действия ракеты, т.е. отношение кинетической энергии K , приобретенной ракетой, к количеству теплоты Q , выделившейся при сгорании топлива. Скорость, достигнутая ракетой $v = 9$ км/с. Удельная теплота сгорания топлива $q = 1,68 \text{ МДж/кг}$, относительная скорость выбрасывания газов $v_0 = 3$ км/с.



Рис. 17.4

17.14. Брусек массой $M = 100$ г подвешен на невесомой пружине жесткостью $k = 1 \text{ Н/м}$ (рис. 17.4). Снизу в него попадает пластилиновый шарик массой $m = 1$ г, летящий вертикально вверх со скоростью $v_0 = 2,5 \text{ м/с}$, и прилипает к бруску. Найти амплитуду A возникающих при этом гармонических колебаний. Ускорение свободного падения принять $g = 10 \text{ м/с}^2$.

17.15. На гладком столе покоятся два одинаковых шарика массой m каж-

дый, скрепленные пружиной длиной l и жесткостью k . Одному из шариков сообщили ударом скорость v в направлении, перпендикулярном прямой, соединяющей их центры. Определить эту скорость, если известно, что при движении шариков пружина растягивалась до максимальной длины, равной L .

17.16. Теннисный мяч ударяется о пол теннисного корта так, что скорость центра мяча непосредственно перед ударом направлена под углом α к вертикали (рис. 17.5). Определить угол отскока мяча β , считая, что до удара мяч двигался поступательно, а в конце удара проскальзывание мяча относительно пола прекратилось. При расчетах положить, что мяч является полым шаром с бесконечно тонкими стенками.

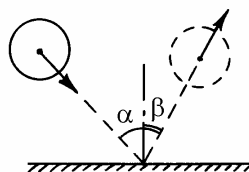


Рис. 17.5

17.17. Клин массой M с углом α при вершине может скользить по гладкой горизонтальной плоскости. С клина скатывается без проскальзывания однородный цилиндр массой m (рис. 17.6). Найти ускорение клина.

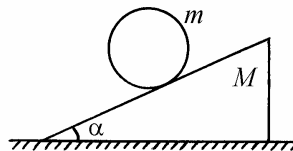


Рис. 17.6

17.18. Тонкий однородный стержень массой m подвешен за концы на двух нитях, закрепленных в одной точке на неподвижной опоре (рис. 17.7). Длина каждой нити равна длине стержня. Одну из нитей пережигают. Найти натяжение другой нити в этот момент времени. Нити считать невесомыми и нерастяжимыми.

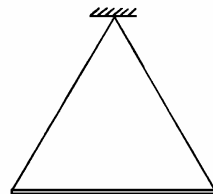


Рис. 17.7

17.19. Показать, что однородный сплошной шар притягивает материальную точку так, как если бы вся масса шара находилась в его центре.

17.20. Тело покоится на наклонной плоскости, причем коэффициент трения μ тела о плоскость связан с углом α наклона плоскости к горизонту соот-

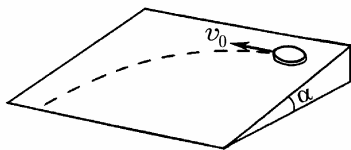


Рис. 17.8

ношением $\mu = \operatorname{tg} \alpha$. Ударом телу сообщили скорость v_0 в горизонтальном направлении вдоль наклонной плоскости (рис. 17.8). Найти установившуюся скорость движения тела v_∞ .

17.21. Бусинка скользит по проволочному кольцу, расположенному горизонтально. Коэффициент трения между бусинкой и проволокой равен μ . Во сколько раз n уменьшится кинетическая энергия бусинки при прохождении ею пути, при котором вектор скорости бусинки повернется на угол $\Delta\varphi$? Действием сил тяжести и сопротивления воздуха пренебречь.

17.22. Шар массой m_1 , движущийся со скоростью $\mathbf{v}$, налетает на покоящийся шар массой m_2 . В момент удара линия, соединяющая центры шаров, составляет с вектором $\mathbf{v}$ угол, равный ϑ . На какой угол φ повернется вектор скорости первого шара в результате удара? Какими будут скорости шаров v_1 и v_2 после удара? Удар считать абсолютно упругим. Трением пренебречь.

17.23. Цепь массой m и длиной l подвешена за концы и находится в состоянии равновесия в однородном поле тяготения. Найти функцию $y(x)$, описывающую форму цепи, если известно, что звено на левом конце цепи является самым нижним, касательная к цепи на левом конце направлена горизонтально, а натяжение цепи на левом конце равно T_0 .

17.24. Брусок массой m , лежащий на горизонтальной плоскости, соединен пружиной жесткостью k с неподвижной стенкой. Пружина расположена горизонтально и в начальном состоянии не деформирована. Брусок смещают вдоль оси пружины на расстояние l и отпускают без начальной скорости. Найти максимальную скорость, которой достигнет брусок в процессе движения, если коэффициент трения бруска о плоскость равен μ .

17.25. Три одинаковых тела массой m каждое надеты на горизонтальный стержень, по которому могут скользить без трения. Первое и второе тело

соединены пружиной жесткостью k , такой же пружиной соединены второе и третье тела. Найти собственные частоты колебаний и нормальные координаты для этой системы.

17.26. В однородном диске радиусом R просверлили отверстие радиусом r , центр которого расположен на расстоянии a от центра диска. Вычислить момент инерции этого тела относительно оси, проходящей через центр диска перпендикулярно его плоскости. На каком расстоянии от центра диска находится центр масс диска с отверстием? Масса диска с отверстием m .

17.27. Искусственный спутник движется вокруг Земли по круговой орбите радиусом r_0 . Для изменения орбиты спутника на короткое время включают навигационный двигатель, в результате чего линейная скорость спутника увеличивается на $n = 9,5\%$, оставшись неизменной по направлению. Найти расстояние от центра Земли до апогея (самой удаленной от Земли точки) новой орбиты спутника.

17.28. Тонкий однородный стержень массой m шарнирно закреплен на одном из концов (рис. 17.9). Приподнимая стержень за свободный конец, его приводят в положение, при котором он составляет с горизонталью угол 30° , а затем отпускают без начальной скорости. Определить реакцию шарнира P в момент, когда стержень проходит горизонтальное положение.

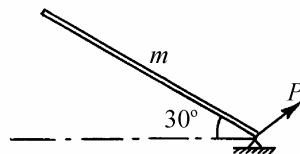


Рис. 17.10

17.29. Объем тонкостенного цилиндрического сосуда высотой $H = 40$ см равен $V = 400 \text{ см}^3$, его масса $m = 330$ г. При температуре окружающей среды $t = 47^\circ\text{C}$ и атмосферном давлении $p_0 = 100$ кПа сосуд переворачивают вверх дном и погружают в жидкость плотностью $\rho = 1000 \text{ кг/м}^3$. При этом сосуд плавает, как изображено на рис.

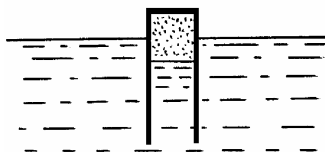


Рис. 17.10

17.10. Затем температура окружающей среды начинает медленно понижаться. При какой температуре t_1 сосуд утонет? Атмосферное давление считать неизменным, ускорение свободного падения принять $g = 10 \text{ м/с}^2$.

17.30. Считая молекулы газа твердыми гладкими шариками массой m , вычислить среднее значение произведения $\langle v_z \cdot v'_z \rangle$, где v_z – проекция скорости молекулы на ось OZ перед столкновением, v'_z – проекция скорости молекулы на ось OZ сразу после столкновения с другой молекулой. Температура газа T .

17.31. Считая молекулы газа твердыми гладкими шариками массой m , вычислить среднее значение произведения $B(\tau) = \langle v_z(t) \cdot v_z(t + \tau) \rangle$, где $v_z(t)$ – декартова компонента скорости молекулы в момент времени t . Температура газа T .

Указание. Считать, что число столкновений n , которые испытывает молекула газа за время t , есть пуассоновская случайная величина со средним значением $\langle n \rangle = \nu \cdot t$, где $\nu = \text{const}$ – средняя частота столкновений.

17.32. Фотон с энергией $E_0 = 1 \text{ эВ}$ распространяется вдоль оси OX . Навстречу фотону движется электрон с энергией $E = 50 \text{ МэВ}$. В результате столкновения образуется фотон с энергией E_1 , распространяющийся против оси OX . Найти величину E_1 . Энергия покоя электрона $mc^2 = 0,5 \text{ МэВ}$.

Ответы

§1. Кинематика материальной точки

$$1.6. \quad a = \sqrt{(\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2)^2 + (2\dot{\rho}\dot{\phi} + \rho\ddot{\phi})^2}.$$

$$1.7. \quad \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{c^2} = 1 \quad (\text{эллипс с полуосями } b \text{ и } c); \quad \mathbf{a} = -\omega^2 \mathbf{r} \quad (\text{ускорение направлено к центру эллипса}).$$

$$1.8. \quad \mathbf{v} = \mathbf{b}(1 - 2\alpha t); \quad \mathbf{a} = -2\alpha \mathbf{b}; \quad \tau = \frac{1}{\alpha}; \quad S = \frac{b}{2\alpha}.$$

$$1.9. \quad y = x - \frac{\alpha}{b}x^2; \quad \mathbf{v} = \mathbf{i}b + \mathbf{j}(b - 2\alpha t); \quad v = b\sqrt{2 - 4\alpha t + 4\alpha^2 t^2}; \quad \mathbf{a} = -\mathbf{j}2\alpha b; \\ a = 2\alpha b; \quad \tau = \frac{1}{\alpha}.$$

$$1.10. \quad v = \frac{v_0 R}{R + v_0 t}; \quad S = \ln\left(1 + \frac{v_0}{R}t\right).$$

$$1.11. \quad a(0) = l\alpha_0^2\omega^2; \quad a(\alpha_0) = l\alpha_0\omega^2; \quad a_{\min} = l\omega^2\sqrt{\alpha_0^2 - \frac{1}{4}}; \quad \alpha_m = \pm\sqrt{\alpha_0^2 - \frac{1}{2}}.$$

$$1.12. \quad l = \frac{v_0^2}{g} \left(\sqrt{\frac{1}{4} - \left(\frac{gh}{v_0^2}\right)^2} - \frac{1}{2} + \frac{gh}{v_0^2} \right); \quad \cos \alpha = \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{gh}{v_0^2}}; \quad S_{\max} = \frac{v_0^2}{g} - 2h.$$

Указание: дальность полета мин над плоскогорьем максимальна, если угол, который составляет с горизонтом скорость мин на высоте h , равен 45° .

$$1.13. \quad l_1 = \frac{u_0 L}{v_0}; \quad l_2 = \frac{u_0 L}{2v_0}; \quad l_3 = \frac{2u_0 L}{3v_0}.$$

$$1.14. \quad v_x = v_y \operatorname{ctg} \alpha; \quad v_c = \frac{v_y}{2 \sin \alpha}.$$

$$1.15. \quad 2y_1 + y_2 + y_3 = \text{const}; \quad 2v_{1y} + v_{2y} + v_{3y} = 0; \quad 2a_{1y} + a_{2y} + a_{3y} = 0.$$

§2. Кинематика твердого тела

$$2.6. \quad x(\varphi) = R(\varphi - \sin \varphi), \quad y(\varphi) = R(1 - \cos \varphi).$$

$$2.7. \quad \omega = \frac{1}{l} \sqrt{v_1^2 + v_2^2}.$$

$$2.8. \quad v_{01} = \frac{v_B}{2 \sin\left(\frac{\pi - \alpha}{4}\right)} = 2 \text{ м/с}, \quad v_{02} = \frac{v_B}{2 \cos\left(\frac{\pi - \alpha}{4}\right)} \approx 1,15 \text{ м/с}.$$

$$2.9. \quad \omega = \frac{v_c}{r}.$$

$$2.10. \quad v = \frac{v_0}{1 - \operatorname{tg} \alpha}.$$

$$2.11. \quad \hat{S} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

$$2.12. \quad t_{ij} = s_{ji}, \text{ или } \hat{T} = \hat{S}^T, \text{ где символ } T \text{ обозначает операцию транспонирования.}$$

$$2.13. \quad \sum_k s_{ik} s_{jk} = \delta_{ij}, \text{ где } \delta_{ij} - \text{символ Кронекера, } i = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3.$$

$$2.14. \quad s_{ij} = \sum_k s_{ik}^{(1)} s_{kj}^{(2)}, \text{ или } \hat{S} = \hat{S}^{(1)} \hat{S}^{(2)}. \text{ Искомая матрица является произведением матриц } \hat{S}^{(1)} \text{ и } \hat{S}^{(2)}.$$

$$2.15. \quad v'_i = \sum_j s_{ji} v_j, \quad a'_i = \sum_j s_{ji} a_j.$$

§3. Кинематика относительного движения

$$3.7. \quad u = \frac{v}{\sqrt{2}} \pm \sqrt{u_0^2 - \frac{v^2}{2}}.$$

$$3.8. \quad n_0 = \frac{n_1 v_2 - n_2 v_1}{v_2 - v_1} = 100 \text{ капель в секунду.}$$

$$3.9. l = \frac{v_2 \sin \alpha}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + 2v_1 v_2 \cos \alpha}} L.$$

$$3.10. v = 3V.$$

$$3.11. v_1 = \sqrt{v^2 + 4u^2 \cos \vartheta - 4uv \cos^2 \vartheta}.$$

$$3.12. v_{\text{отн}} = v_1 \cos(\pi - \alpha)(\operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg}(\pi - \alpha)).$$

$$3.13. \text{Влево по ходу движения.}$$

$$3.14. v_{\text{отн}} = V \frac{d}{R} = 20 \text{ км/ч.}$$

$$3.15. v_{\text{отн}} = V \sqrt{2 + 2 \frac{d}{R} + \frac{d^2}{R^2}} \approx 116,6 \text{ км/ч.}$$

$$3.16. l = R(\operatorname{tg} \alpha - \alpha), \text{ где } \alpha = \arccos \frac{R - h}{R}.$$

§4. Динамика материальной точки. Законы Ньютона

$$4.6. v = v_0 e^{-\frac{\beta}{m} t}; S = v_0 \frac{m}{\beta}.$$

$$4.7. 1) S = g\tau \left(1 - \frac{\tau}{2}\right); 2) S = \frac{mg}{\beta} \tau + \frac{m^2}{\beta^2} g e^{-\frac{\beta}{m} t} \left(1 - e^{\frac{\beta}{m} t}\right). \text{ Отсчет времени } t$$

начинается с начала падения первой капли.

$$4.8. 1) |\mathbf{F}_{\text{cp}}| = \frac{2\sqrt{2}}{\pi R} mV^2; 2) |\mathbf{F}_{\text{cp}}| = ma_{\tau}.$$

$$4.9. F = 3P_1.$$

$$4.10. a = \frac{gR}{l} \left(1 - \cos \frac{l}{R}\right).$$

$$4.11. a = g\sqrt{9\mu^2 + 4} = 20,5 \text{ м/с}^2.$$

$$4.12. \alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{1}{\mu}.$$

$$4.13. a_1 = \frac{4m_1m_2 + m_0(m_1 - m_2)}{4m_1m_2 + m_0(m_1 + m_2)} g; \quad m_1 = \frac{m_0m_2}{m_0 + 4m_2}.$$

$$4.14. a_1 = \frac{m_1g - m_2(g - a_2)}{(m_1 + m_2)}; \quad R = \frac{m_1m_2}{m_1 + m_2}(2g - a_2).$$

$$4.15. F = \frac{9mM}{4m + M} g.$$

$$4.16. u = \sqrt{\frac{(gR \operatorname{tg} \alpha + v^2)gR}{gR - v^2 \operatorname{tg} \alpha}}.$$

§5. Законы сохранения импульса и энергии

$$5.6. \Delta K = 2mu(u - v), \quad \Delta \mathbf{p} = 2m(\mathbf{u} - \mathbf{v}).$$

$$5.7. u = v \frac{M + m}{m \cos \alpha}.$$

$$5.8. v_0 = \sqrt{\frac{gl}{\beta + 1}}.$$

$$5.9. x = \frac{(m_2 - m_1)l}{m_1 + m_2 + M}.$$

$$5.10. \vartheta = \operatorname{arctg} 3 \approx 70^\circ.$$

$$5.11. v_x = v_0 \cdot \frac{\beta^2 - 2}{6 - \beta^2}. \text{ Здесь ось } OX \text{ направлена вдоль начальной скорости}$$

шайбы A . При $\beta < \sqrt{2}$ шайба A отскочит назад, при $\beta = \sqrt{2}$ остановится, при $\beta > \sqrt{2}$ будет двигаться вперед.

$$5.12. F = \frac{mS}{t_0^2} = 2,5 \cdot 10^4 \text{ Н}, \quad A = \frac{mS^2}{t_0^2} = 2,5 \cdot 10^5 \text{ Дж}, \quad K = \frac{mS^2}{2t_0^2} = \frac{A}{2}.$$

$$5.13. v = m \cdot \sqrt{\frac{2gR}{M(M + m)}}.$$

$$5.14. v = \sqrt{\frac{2}{m_1 + m_2} \cdot \left(m_1gh + \frac{m_2^2}{m_1 + m_2} \cdot \frac{v_0^2}{2} \right)}.$$

$$5.15. \quad L = l + v_0 \sqrt{\frac{m_1 m_2}{k(m_1 + m_2)}}.$$

$$5.16. \quad S = L \left(1 + \frac{|m - M|}{m + M} \right).$$

§6. Релятивистская механика

$$6.8. \quad v = \frac{2v_0}{1 + v_0^2 / c^2}. \quad v \approx 0,198c; 0,8c; 0,994c.$$

$$6.9. \quad v = v_0 \sqrt{2 - \frac{v_0^2}{c^2}}. \quad v \approx 0,141c; 0,661c; 0,982c.$$

$$6.10. \quad a = \frac{F}{m} \sqrt{1 - v^2 / c^2} = 0,6 \frac{F}{m}.$$

$$6.11. \quad \beta = \arctg \left[\frac{\operatorname{tg} \alpha}{1 - v^2 / c^2} \right] = \arctg \frac{4}{3}. \text{ Заметим, что } \beta > \alpha.$$

$$6.12. \quad p'_x = \frac{p_x - EV / c^2}{\sqrt{1 - V^2 / c^2}}, \quad p'_y = p_y, \quad p'_z = p_z, \quad E' = \frac{E - p_x V}{\sqrt{1 - V^2 / c^2}}$$

$$6.13. \quad E = pc, \quad v = c. \text{ Такая частица называется фотоном.}$$

$$6.14. \quad \eta = \frac{2}{\sqrt{1 + 3v_0^2 / c^2}}. \quad \eta \approx 1,971; 1,512; 1,080.$$

$$6.15. \quad v = \frac{v_1}{1 + \sqrt{1 - v_1^2 / c^2}} = 0,5c.$$

§7. Неинерциальные системы отсчета

$$7.6. \quad a = a_0 \cos \alpha - \mu \sqrt{a_0^2 \sin^2 \alpha + g^2}.$$

$$7.7. \quad a = \frac{1}{2} g(1 - \mu) - \frac{1}{2} a_0(1 + \mu), \text{ если } a_0 < g \frac{1 - \mu}{1 + \mu},$$

$$a = 0, \text{ если } g \frac{1 - \mu}{1 + \mu} \leq a_0 \leq g \frac{1 + \mu}{1 - \mu},$$

$$a = -\frac{1}{2}g(1+\mu) + \frac{1}{2}a_0(1-\mu), \text{ если } a_0 > g\frac{1+\mu}{1-\mu}.$$

$$7.8. T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{\sqrt{g^2 + a^2}}}.$$

$$7.9. \text{ На восток, на расстояние } x = v_0 \Omega \tau^2 \sin \varphi \approx 3,1 \text{ см.}$$

$$7.10. \omega_2 = \omega_1 \frac{\sin \varphi_2}{\sin \varphi_1} \approx 5,02 \cdot 10^{-5} \text{ рад/с.}$$

$$7.11. v_c = \sqrt{R(2g + \omega^2 R)}.$$

$$7.12. \cos \varphi = \frac{3}{5} \cdot \frac{g}{\omega^2 l}.$$

$$7.13. \operatorname{tg} \beta = 2 \operatorname{tg} \alpha - \frac{\omega^2 l}{g} \sin \alpha.$$

$$7.14. \alpha = \operatorname{arctg} \frac{R\omega^2}{g}.$$

$$7.15. R = r \frac{4\pi^2 k + m\omega^2}{4\pi^2 k - m\omega^2}.$$

§8. Момент инерции твердого тела

$$8.6. I = \frac{m}{12}(a^2 + b^2).$$

$$8.7. I = \frac{ml^2}{12} \sin^2 \alpha.$$

$$8.8. I = \frac{m}{2}(r^2 + R^2).$$

$$8.9. I = \frac{m}{4}(a^2 + b^2).$$

$$8.10. I = \frac{mb^2}{2} \left(1 + \frac{1}{3} \operatorname{tg}^2 \alpha \right).$$

$$8.11. I = \frac{5}{16} \pi R^4 b \rho.$$

$$8.12. I = \frac{3}{10} m R^2.$$

$$8.13. I = \frac{3}{5} m \left(H^2 + \frac{R^2}{4} \right).$$

$$8.14. I = \frac{2}{3} m R^2.$$

$$8.15. \text{ Центр масс находится на расстоянии } z_c = \frac{3}{8} R \text{ от центра.}$$

§9. Динамика твердого тела

$$9.7. a = \frac{(m_1 - m_2)g}{m_1 + m_2 + I / R^2}.$$

$$9.8. \varepsilon = \frac{4}{11} \cdot \frac{g}{R}.$$

$$9.9. T = Mg + \frac{Img}{I + mr^2}.$$

$$9.10. a = \frac{g}{1 + \frac{3M}{8m}}, \quad a_c = \frac{g}{2 + \frac{3M}{4m}}.$$

$$9.11. \mu \geq \mu_{\min} = \frac{1}{8 + 3 \frac{M}{m}}.$$

$$9.12. a = \frac{3m - \mu M}{3m + M} g, \quad a_c = \frac{m + \mu(4m + M)}{3m + M} g.$$

$$9.13. a_1 = \frac{2m_2 F}{(2m_1 + 3m_2)(m_2 + 2m_3) - m_2^2}.$$

$$9.14. v_1 = \frac{MR\omega_0}{m + 3M}, \quad v_2 = \frac{mR\omega_0}{m + 3M}.$$

$$9.15. a = \frac{3F}{m + 3M}.$$

$$9.16. F = \mu g(m + 3M).$$

$$9.17. a = \frac{2g \sin \alpha}{2 + \frac{I_1 + I_2}{mR^2}}.$$

$$9.18. t_0 = \frac{2}{7} \frac{v_0}{\mu g}.$$

$$9.19. v = \sqrt{3gh}.$$

$$9.20. \omega_2 = (\sqrt{2} - 1)\omega_1.$$

§10. Закон сохранения момента импульса

$$10.6. \omega = \frac{mru}{I + mr^2}.$$

$$10.7. l = \frac{L}{\sqrt{3}}.$$

$$10.8. l = \frac{L}{\sqrt{12}} \sqrt{1 + \frac{M}{m}} \text{ при } M \leq 2m; l = \frac{L}{2} \text{ при } M > 2m.$$

$$10.9. \text{Точкой, находящейся на расстоянии } \frac{2}{3}l \text{ от рукоятки сабли.}$$

$$10.10. v = \frac{Ml}{m(l-a)} \sqrt{\frac{2gl}{3}} \sin \frac{\varphi}{2}.$$

$$10.11. v_0 = h \sqrt{\frac{2g}{h+h_0}}, \quad v = h_0 \sqrt{\frac{2g}{h+h_0}}.$$

$$10.12. v_0 = \sin \theta \sqrt{\frac{2gl}{\cos \theta_0 + \cos \theta}}, \quad v = \sin \theta_0 \sqrt{\frac{2gl}{\cos \theta_0 + \cos \theta}}.$$

$$10.13. v_0 = \sqrt{\frac{GM}{r+r_0} \cdot \frac{r}{r_0}}, \quad v = \sqrt{\frac{GM}{r+r_0} \cdot \frac{r_0}{r}}.$$

$$10.14. A = \frac{1}{2} m R^2 \omega_0^2 \left(1 + \frac{m R^2}{I} \right).$$

$$10.15. K = \frac{2mMv_0^2}{7m+4M} \approx \frac{mv_0^2}{2} \left(1 - \frac{7m}{4M} \right).$$

$$10.16. S = \frac{\pi L}{3}.$$

§11. Динамика систем со связями. Уравнения Лагранжа и Гамильтона

$$11.6. L = \frac{ml^2}{3} \cdot \frac{\dot{\theta}^2}{2} - \frac{mgl}{2} \sin \theta, \quad \ddot{\theta} + \frac{3g}{2l} \cos \theta = 0.$$

$$11.7. L = m \left(R^2 - \frac{l^2}{6} \right) \frac{\dot{\varphi}^2}{2} - mg \sqrt{R^2 - \frac{l^2}{4}} (1 - \cos \varphi),$$

$$m \left(R^2 - \frac{l^2}{6} \right) \ddot{\varphi} + mg \sqrt{R^2 - \frac{l^2}{4}} \sin \varphi = 0.$$

$$11.8. L = m(l_0 + v_0 t)^2 \frac{\dot{\varphi}^2}{2} + mg(l_0 + v_0 t) \cos \varphi,$$

$$\ddot{\varphi} + \frac{2v_0}{l_0 + v_0 t} \dot{\varphi} + \frac{g}{l_0 + v_0 t} \sin \varphi = 0.$$

$$11.9. L = \frac{1}{2} ml^2 (\dot{\vartheta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \vartheta) + mgl \cos \vartheta.$$

$$11.10. L = \frac{ml^2}{2} (2\dot{\varphi}^2 + \dot{\psi}^2 + 2\dot{\varphi}\dot{\psi} \cos(\varphi - \psi)) + mgl(2\cos \varphi + \cos \psi).$$

$$11.11. L = \frac{ml^2}{2} \left(\frac{4}{3} \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{3} \dot{\psi}^2 + \dot{\varphi}\dot{\psi} \cos(\varphi - \psi) \right) + mgl \left(\frac{3}{2} \cos \varphi + \frac{1}{2} \cos \psi \right).$$

$$11.12. L = (M + m) \frac{\dot{x}^2}{2} + ml^2 \frac{\dot{\varphi}^2}{2} + m\dot{x}\dot{\varphi} \cos \varphi + mgl \cos \varphi.$$

$$11.13. H = \frac{p^2}{2ml^2} - mgl \cos \varphi.$$

$$11.14. H = \frac{1}{2ml^2} \left(p_0^2 + \frac{p_\phi^2}{\sin^2 \theta} \right) - mgl \cos \theta.$$

$$11.15. H = \frac{1}{4m} (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + \frac{1}{ml^2} \left(p_0^2 + \frac{p_\phi^2}{\sin^2 \theta} \right).$$

$$11.16. L = \frac{m}{2} \left[\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + (z'_x \dot{x} + z'_y \dot{y})^2 \right] - mgz(x, y),$$

$$\left[1 + \left(\frac{x}{a} \right)^2 \right] \ddot{x} + \frac{x}{a^2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{xy}{a^2} \ddot{y} + g \frac{x}{a} = 0,$$

$$\left[1 + \left(\frac{y}{a} \right)^2 \right] \ddot{y} + \frac{y}{a^2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{xy}{a^2} \ddot{x} + g \frac{y}{a} = 0.$$

§12. Статика. Равновесие механической системы

$$12.6. x \geq \frac{a(\mu-1)}{2\mu}. \text{ При } \mu \leq 1 \text{ сила может быть приложена в любой точке.}$$

$$12.7. \mu_{\min} = \frac{\sin(\pi/6 - \alpha) - \sqrt{3} \sin \alpha}{1 + \cos(\pi/6 - \alpha) + \sin \alpha}, \text{ где } \sin \alpha = \frac{1}{6} \text{ и } \mu_{\min} \approx 0,028 \text{ для}$$

цилиндрического желоба; $\alpha = 0$ и $\mu_{\min} \approx 0,27$ для плоской опоры.

$$12.8. \operatorname{tg} \varphi = \operatorname{ctg} \alpha - \frac{b^2}{a(a+2b) \sin \alpha}.$$

$$12.9. \operatorname{tg} \alpha = \frac{L(M-m)}{l(4M+3m)}.$$

$$12.10. \operatorname{tg} \alpha = \frac{m_1 - m_2}{\sqrt{3}(m_1 + m_2)}.$$

$$12.11. \mu \geq \frac{2 \sin \alpha \cos \alpha}{1 + 2 \sin^2 \alpha}.$$

$$12.12. k = \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} = \sqrt{2}.$$

12.13. На расстоянии $x_{\tilde{n}} = \frac{Rr^2}{2(R^2 - r^2)}$ слева от центра диска.

12.14. На расстоянии $x_c = \frac{4R}{3\pi}$ от центра диска.

12.15. На расстояниях $x_c = \frac{2R^2}{l} \sin \frac{l}{2R}$; $x_c = \frac{2\sqrt{2}R}{\pi}$; $x_c = \frac{2R}{\pi}$ от центра дуги.

§13. Малые колебания

$$13.6. \omega = \sqrt{\frac{2g}{3(R-r)}}.$$

$$13.7. \omega = 2\sqrt{\frac{g}{(2/3 + \pi)D}}.$$

$$13.8. \omega = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3\sqrt{2}g}{l}}.$$

$$13.9. \omega = \sqrt{\frac{(m+M)(k_1+k_2)}{mM}}.$$

$$13.10. \frac{\omega_x}{\omega_y} = \sqrt{\frac{l}{l-l_0}}.$$

$$13.11. \omega = (R+r)\sqrt{\frac{k}{mr^2+I}}.$$

$$13.12. \omega = \sqrt{\frac{3(mg+kl)}{2ml}}.$$

$$13.13. \omega = \sqrt{\frac{2\mu g}{l}}.$$

$$13.14. \omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \omega_1 = \sqrt{\frac{k+2k_1}{m}}; \alpha_{11}=1, \alpha_{12}=1; \alpha_{21}=1, \alpha_{22}=-1.$$

$$13.15. \omega_{1,2} = \left\{ \frac{1}{2} \left[\left(\frac{m}{M} + 1 \right) \frac{g}{l} + \frac{k}{M} \right] \mp \sqrt{\frac{1}{4} \left[\left(\frac{m}{M} + 1 \right) \frac{g}{l} + \frac{k}{M} \right]^2 - \frac{kg}{Ml}} \right\}^{1/2}.$$

$$\text{При } M = m, k = \frac{mg}{l} \quad \omega_{1,2} = \Omega_0 \sqrt{\frac{3 \mp \sqrt{5}}{2}}, \text{ где } \Omega_0 = \sqrt{\frac{k}{M}} = \sqrt{\frac{g}{l}};$$

$$\alpha_{11} = 1, \alpha_{12} = \frac{3 - \sqrt{5}}{l(\sqrt{5} - 1)}; \quad \alpha_{21} = 1, \alpha_{22} = -\frac{3 + \sqrt{5}}{l(\sqrt{5} + 1)}.$$

§14. Механика жидкостей и газов

$$14.6. H = h \left(1 + \frac{M_1 + m}{M_2} \right) = \frac{5}{2} h = 25 \text{ см.}$$

$$14.7. \beta = \frac{(1 - \alpha / 100\%) \rho_B (\rho_a - \rho_l)}{(\rho_a - \alpha \rho_B / 100\%) (\rho_B - \rho_l)} \cdot 100\% = 51\%.$$

$$14.8. h = \frac{m}{\pi \rho R^2} + \frac{2}{3} R.$$

$$14.9. A = \frac{\rho g l^2 S^2}{2} \left(\frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_2} \right).$$

$$14.10. \tau = \sqrt{\frac{2h(n^2 - 1)}{g}} \approx 180 \text{ с. Указание. Воспользуйтесь решением задачи 14.4.}$$

$$14.11. h = H / 2.$$

$$14.12. \text{ а) } z = \frac{\omega^2 r^2}{2g}, \text{ где } z - \text{ расстояние по вертикали от уровня поверхности воды на оси сосуда, } r - \text{ расстояние от оси вращения; б) } p = p_0 + \frac{\rho \omega^2 r^2}{2}.$$

$$14.13. \tau = \frac{18\eta h}{(\rho_{\text{св}} - \rho_{\text{гл}})g} \cdot \frac{d_2^2 - d_1^2}{d_1^2 d_2^2} \approx 225 \text{ с.}$$

$$14.14. Q = S_1 S_2 \sqrt{\frac{2g\Delta h}{S_1^2 - S_2^2}}.$$

$$14.15. v = \sqrt{2g(H - 4atg\alpha)} \approx 0,755 \text{ м/с}.$$

§15. Статистическая механика

$$15.12. w(u) = \int_{-\infty}^{\infty} w_1(x) \cdot w_2(u-x) dx, \quad w(v) = \int_{-\infty}^{\infty} w_1(x) \cdot w_2(x-v) dx.$$

$$15.13. w(u) = \frac{1}{\sigma_u \sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left(-\frac{u^2}{2\sigma_u^2}\right), \text{ где } \sigma_u^2 = 2\sigma^2.$$

$$15.14. w(\tau) = v \cdot \exp(-v\tau).$$

$$15.15. \langle v \rangle = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} \approx 470 \text{ м/с}.$$

$$15.16. w(K) = \frac{2\pi}{(\pi kT)^{3/2}} \cdot \sqrt{K} \cdot \exp(-K / kT).$$

$$15.17. \langle u \rangle = \sqrt{\frac{8kT}{\pi\mu}}, \text{ где } \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}.$$

$$15.18. \langle z \rangle = \frac{6kT}{\pi g(\rho - \rho_0)d^3} \approx 2 \cdot 10^{-5} \text{ м}.$$

$$15.19. \alpha = \exp\left(\frac{\mu gh}{RT}\right) \approx 1,001.$$

$$15.20. \lambda = \frac{kT}{\pi\sqrt{2}pd^2} \approx 10^{-7} \text{ м}.$$

$$15.21. T(r) = T_0 + \frac{\rho I^2}{4\pi^2 \kappa \cdot r_0^4} \cdot (r_0^2 - r^2).$$

§17. Задачи повышенной трудности

$$17.1. v_0 = \sqrt{g(2h+l)} \approx 15,34 \text{ м/с},$$

$$\alpha = \arccos \sqrt{\frac{l}{4h+2l}} \approx 69^\circ 18', a = \frac{l}{2} \left(\sqrt{4\frac{h}{l}+1} - 1 \right) \approx 4,94 \text{ м}.$$

$$17.2. a = \frac{1}{2} \left(D - \sqrt{D^2 - L^2} \right) = 2 \text{ м}.$$

$$17.3. v_0 = \frac{v_1 \pm \sqrt{(4v_2^2 - v_1^2)/3}}{2} = \frac{\sqrt{6} \pm 1}{2} \text{ м/с}, v_{01} \approx 1,72 \text{ м/с}, v_{02} \approx 0,72 \text{ м/с}.$$

$$17.4. h = \frac{m}{\beta} v_0 - \frac{m^2 g}{\beta^2} \ln \left(1 + \frac{\beta v_0}{mg} \right), \tau = \frac{m}{\beta} \ln \left(1 + \frac{\beta v_0}{mg} \right).$$

$$17.5. v_{\max} = B \sqrt{\frac{\mu g}{A}} \approx 40,3 \text{ км/ч}.$$

$$17.6. \alpha = \arctg \left(\frac{\sin \beta}{\cos \beta + \sqrt{1 + m \sin^2 \beta / M}} \right).$$

$$17.7. \beta = \pi - 2 \arcsin \left(\frac{S}{2R} \right) = \frac{2\pi}{3}.$$

$$17.8. \alpha = \frac{v_0}{v} \ln \frac{m_0}{m_0 - m} = 4,5 \cdot 10^{-3} \text{ рад}.$$

$$17.9. \alpha = \frac{K_p}{K_r} = \frac{x^2}{e^x - (1+x^2)} \approx 45\%, \text{ где } x = \frac{v_{\text{отн}}}{v_0} = 4.$$

$$17.10. v = 2v_0.$$

$$17.11. v = v_0 \ln \frac{m_0}{m_0 - \mu t} - gt, v_3 = 112,7 \text{ м/с}, v_{\text{л}} = 194,7 \text{ м/с}.$$

$$17.12. \mu(t) = \frac{m_0 g}{v_0} e^{-gt/v_0}, m = m_0 (1 - e^{-gt_0/v_0}) \approx 105,2 \text{ кг}.$$

$$17.13. \eta = \frac{K}{Q} = \frac{v^2}{2q(e^{v/v_0} - 1)} \approx 13\%.$$

$$17.14. A = \frac{mg}{k} \sqrt{1 + \frac{k}{M+m} \left(\frac{v_0}{g} \right)^2} \approx 1,3 \text{ см.}$$

$$17.15. v = L(L-l) \sqrt{\frac{2k}{m(L^2-l^2)}}.$$

$$17.16. \cos \beta = \frac{\cos \alpha}{\sqrt{\cos^2 \alpha + p^2 \sin^2 \alpha}}, \text{ где } p = \frac{mR^2}{I + mR^2} = \frac{3}{5}, m - \text{масса мяча,}$$

R – его радиус, $I = \frac{2}{3}mR^2$ – момент инерции мяча относительно центра. *Указание:* считать, что в момент удара радиус мяча остается неизменным.

$$17.17. a = \frac{mg \sin 2\alpha}{3M + m(1 + 2 \sin^2 \alpha)}.$$

$$17.18. T = \frac{2\sqrt{3}}{13} mg \approx 0,266 mg.$$

$$17.20. v_\infty = \frac{1}{2} v_0.$$

$$17.21. n = \frac{K_0}{K} = e^{2\mu\Delta\varphi}.$$

$$17.22. \operatorname{tg} \varphi = \frac{\alpha \sin 2\theta}{1 - \alpha \cos 2\theta}, \quad v_1 = v_c \sqrt{1 + \alpha^2 - 2\alpha \cos 2\theta}, \quad v_2 = 2v_c \cos \theta, \text{ где}$$

$$v_c = \frac{v}{1 + \alpha}, \quad \alpha = \frac{m_2}{m_1}.$$

$$17.23. y(x) = \frac{1}{2\beta} (e^{\beta x} + e^{-\beta x} - 2) = \frac{1}{\beta} (\operatorname{ch} \beta x - 1), \text{ где } \beta = \frac{mg}{lT_0}; \text{ начало отсчета}$$

выбрано на левом конце цепи.

$$17.24. v_{\max} = \sqrt{\frac{k}{m} \left(l - \frac{\mu mg}{k} \right)}, \text{ если } l > \frac{\mu mg}{k}. \text{ В противном случае брусок}$$

не сдвинется с места.

$$17.25. \omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \xi_1 = \frac{1}{2}(x_1 - x_3); \omega_2 = \sqrt{\frac{3k}{m}}, \xi_2 = \frac{1}{6}(x_1 - 2x_2 + x_3);$$

$$\omega_3 = 0, \xi_3 = \frac{1}{3}(x_1 + x_2 + x_3); \text{ где } x_1, x_2, x_3 - \text{смещения тел}$$

относительно положений, в которых пружины не напряжены.

$$17.26. I = \frac{m(R^4 - r^4 - 2r^2 a^2)}{2(R^2 - r^2)}, x_c = \frac{ar^2}{R^2 - r^2}.$$

$$17.27. R = \frac{\alpha^2}{2 - \alpha^2} r_0 \approx 1,5 r_0, \text{ где } \alpha = 1 + \frac{n}{100\%} = 1,095.$$

$$17.28. P_x = \frac{3}{4} mg, P_y = \frac{1}{4} mg, P = \frac{\sqrt{10}}{4} mg \approx 0,79 mg, \text{ где } P_x \text{ и } P_y -$$

горизонтальная и вертикальная проекции силы реакции, P – ее модуль.

$$17.29. t_1 = (t + 273^\circ \text{C}) \cdot \frac{m}{V\rho} \cdot \left(1 + \frac{PH}{p_0 V}\right) - 273^\circ \text{C} = 16,8^\circ \text{C}.$$

$$17.30. \langle v_z \cdot v'_z \rangle = \frac{2}{3} \langle v_z^2 \rangle, \text{ где } \langle v_z^2 \rangle = kT/m.$$

$$17.31. B(\tau) = \langle v_z^2 \rangle \cdot \exp(-\nu\tau/3), \text{ где } \langle v_z^2 \rangle = kT/m.$$

$$17.32. E_1 = E_0 \left(\frac{2E}{mc^2} \right)^2 = 4 \cdot 10^4 \text{ эВ. Указание: перейти в систему отсчета,}$$

движущуюся со скоростью электрона до столкновения; учесть что $E_0 \ll mc^2$.

Литература

1. С.П. Стрелков. Механика. М.: Наука, 1975, С.-Пб.: Лань, 2005.
2. А.Н. Матвеев. Механика и теория относительности. М.: Высшая школа", 1986.
3. Д.В. Сивухин. Общий курс физики. Том I. Механика. М.: Наука, 1989.
4. Ч. Киттель, У. Найт, М. Рудерман. Механика. М.: Наука, 1983.
5. И.И. Ольховский. Курс теоретической механики для физиков. М.: Изд-во МГУ, 1978.
6. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Механика. М.: Наука, 1965.

Учебное издание

ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАНЯТИЯ ПО ФИЗИКЕ
ДЛЯ СТУДЕНТОВ-МАТЕМАТИКОВ
Под редакцией профессора В.А. Макарова

ЧАСТЬ I.

НИКИТИН Сергей Юрьевич,
ЧЕСНОКОВ Сергей Сергеевич

МЕХАНИКА

Оригинал–макет: *Чесноков С.С.*

Издательский отдел
факультета вычислительной математики и кибернетики
МГУ им. М.В. Ломоносова
Лицензия ИД № 05899 от 24.09.01

119992, ГСП-2, Москва, Ленинские горы, МГУ им. М.В. Ломоносова,
2-й учебный корпус

Напечатано с готового оригинал-макета
в издательстве ООО «Макс Пресс»
Лицензия ИД N 00510 от 01.12.99 г.
Подписано к печати 29.05.2006 г.
Формат 60х90 1/16. Усл. печ. л. 18,75. Тираж 650 экз. Заказ 404.
119992, ГСП-2, Москва, Ленинские горы, МГУ им. М.В. Ломоносова,
2-й учебный корпус, 627 к.
Тел. 939-3890, 939-3891. Тел./Факс 939-3891